C. R. Acad. Sci. Paris,
Sér. **I 341** (2005), p. 469-474.

Minorations non triviales du plus petit commun multiple de certaines suites finies d'entiers

Nontrivial lower bounds for the least common multiple of some finite sequences of integers

Bakir Farhi [a]

[a] *Département de Mathématiques, Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9, France*

Résumé

On présente ici une méthode permettant de minorer le plus petit commun multiple de certaines suites finies d'entiers. Nous obtenons des minorations efficaces (voir optimales en un certain sens) pour les progressions arithmétiques et des minorations moins efficaces (mais non triviales) pour une certaine classe de suites quadratiques.

La dernière partie de la note étudie l'entier $\mathrm{ppcm}(n, n+1, \dots, n+k)$ $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*)$. On détermine pour cet entier, un diviseur $d_{n,k}$ simple en sa dépendance en n et k et un multiple $m_{n,k}$ simple en sa dépendance en n et on montre que chacune des deux égalités : $\mathrm{ppcm}(n, n+1, \dots, n+k) = d_{n,k}$ et $\mathrm{ppcm}(n, n+1, \dots, n+k) = m_{n,k}$ a lieu pour une infinité de couples (n, k).

Abstract

We present here a method which allows to derive a nontrivial lower bounds for the least common multiple of some finite sequences of integers. We obtain efficient lower bounds (which in a way are optimal) for the arithmetical progressions and lower bounds less efficient (but nontrivial) for some class of quadratic sequences.

In the last part of this note, we study the integer $\mathrm{lcm}(n, n+1, \dots, n+k)$ $(k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*)$. We show that it has a divisor $d_{n,k}$ simple in its dependence on n and k, and a multiple $m_{n,k}$ also simple in its dependence on n. In addition, we prove that both equalities: $\mathrm{lcm}(n, n+1, \dots, n+k) = d_{n,k}$ and $\mathrm{lcm}(n, n+1, \dots, n+k) = m_{n,k}$ hold for infinitely many pairs (n, k).

Email address: `Bakir.Farhi@univ-lemans.fr` (Bakir Farhi).

Preprint submitted to Elsevier Science

Abridged English version

The prime numbers theorem (see e.g. [2]) implies that $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log \mathrm{lcm}\{1,\dots,n\}}{n}=1$. This is equivalent to the following statement:

$$\forall\varepsilon>0, \exists N=N(\varepsilon)\,/\,\forall n\geq N: \quad (e-\varepsilon)^n \ \leq\ \mathrm{ppcm}\{1,\dots,n\} \ \leq\ (e+\varepsilon)^n.$$

Concerning the effective estimates of the numbers $\mathrm{lcm}\{1,\dots,n\}$ $(n\geq 1)$, one has among others, two main results. The first one is by Hanson [1] which shows (by using the development of the number 1 in Sylvester series) that $\mathrm{lcm}\{1,\dots,n\}\leq 3^n$ for all $n\geq 1$. The second one is by Nair [3] which proves (by exploiting simply the integral $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx$) that one has $\mathrm{lcm}\{1,\dots,n\}\geq 2^n$ for all $n\geq 7$.

In this note, we present a method which allows to find a nontrivial lower bounds for the least common multiple of n consecutive terms $(n\in\mathbb{N}^*)$ of some sequences of integers. We obtain efficient lower bounds (which in a way are optimal) for the arithmetical progressions (see Theorem 2.4). Besides, we obtain also a less efficient lower bounds (but nontrivial) for the quadratic sequences whose general term has the form: $u_n=an(n+t)+b$ with $(a,t,b)\in\mathbb{Z}^3$, $a\geq 5, t\geq 0, \mathrm{pgcd}(a,b)=1$ (see Corollary 2.7).

Our method is based on the use of some identities related to the sequences which we study. More precisely, let $(\alpha_i)_{i\in I}$ be a given finite sequence of nonzero integers, we seek an identity of type $\sum_{i\in I}\frac{1}{\alpha_i\beta_i}=\frac{1}{\gamma}$ where β_i $(i\in I)$ and γ are nonzero integers. If $\mathrm{lcm}\{\beta_i, I\in I\}$ is bounded (say by a real constant $R>0$), one concludes that $\mathrm{lcm}\{\alpha_i, I\in I\}\geq\frac{\gamma}{R}$ (see Lemma 2.1). It remains to check whether this later estimation is nontrivial.

However, the point is that looking for types of the above identities is not easy. the Theorem 2.2 stems from concrete and interesting example of such identities. Though, it is not likewise that we can find other nontrivial applications, than the ones presented here, for that specific example. In order to have nontrivial lower bounds of least common multiple for other families of finite sequences, it could be necessary to seek for new identities related to those sequences.

In the last part of this note, we study the least common multiple of some number of consecutive integers, larger than a given positive integer. In Theorem 2.8, we show that the integer $\mathrm{lcm}\{n,n+1,\dots,n+k\}$ $(n\in\mathbb{N}^*, k\in\mathbb{N})$ has a divisor $d_{n,k}$ simple in its dependence on n and k and a multiple $m_{n,k}$ simple in its dependence on n. In addition, we prove that $d_{n,k}$ and $m_{n,k}$ are optimal in that sens that the equalities $\mathrm{lcm}\{n,\dots,n+k\}=d_{n,k}$ and $\mathrm{lcm}\{n,\dots,n+k\}=m_{n,k}$ hold for infinitely many pairs (n,k). More precisely, we show that both equalities are satisfed at least when (n,k) verifies some congruence modulo $k!$.

1. Introduction

Le théorème des nombres premiers (voir par exemple [2]) a pour conséquence le fait que $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log \mathrm{ppcm}\{1,\dots,n\}}{n}=1$. Ce qui équivaut à dire que pour tout $\varepsilon>0$, on a :

$$(e-\varepsilon)^n \ \leq\ \mathrm{ppcm}\{1,\dots,n\} \ \leq\ (e+\varepsilon)^n$$

dès que n est assez grand en fonction de ε.

Plusieurs travaux ont porté sur l'estimation effective de l'entier $\mathrm{ppcm}\{1,\dots,n\}$ $(n\geq 1)$. Entre autres, le résultat de Hanson [1] qui montre (en utilisant essentiellement le développement du nombre 1 en série de Sylvester) que $\mathrm{ppcm}\{1,\dots,n\}\leq 3^n$ pour tout $n\geq 1$ et celui de Nair [3] qui montre (en exploitant simplement l'intégrale $\int_0^1 x^n(1-x)^n dx$) que l'on a $\mathrm{ppcm}\{1,\dots,n\}\geq 2^n$ pour tout $n\geq 7$.

Dans cette note, nous présentons une méthode permettant de minorer le plus petit commun multiple de n termes consécutifs de certaines suites d'entiers. Nous obtenons des minorations efficaces (voir optimales en un certain sens) pour le cas des progressions arithmétiques (voir Théorème 2.4 et les commentaires qui le suivent) et des minorations moins efficaces (mais non triviales) pour le cas des suites quadratiques dont le terme général est de la forme : $u_n = an(n+t)+b$ avec $(a,t,b) \in \mathbb{Z}^3$, $a \geq 5, t \geq 0, \mathrm{pgcd}(a,b)=1$ (voir Corollaire 2.7).

Notre méthode est basée sur l'exploitation de certaines identités liées à la suite que nous voulons étudier. Plus précisément, étant donnée $(\alpha_i)_{i\in I}$ une suite finie d'entiers non nuls, nous cherchons une identité du type $\sum_{i\in I}\frac{1}{\alpha_i\beta_i} = \frac{1}{\gamma}$ où les β_i $(i \in I)$ et γ sont des entiers non nuls. Si $\mathrm{ppcm}\{\beta_i, i \in I\}$ est facilement majorable (disons par un réel $R > 0$), on conclut à la minoration $\mathrm{ppcm}\{\alpha_i, i \in I\} \geq \frac{\gamma}{R}$ (voir Lemme 2.1). Il reste à voir si cette minoration est non triviale.

La recherche des identités du type sus-cité est le point délicat de la méthode. Le Théorème 2.2 provient d'un exemple concret et intéressant de telles identités. Cependant, il ne semble pas avoir d'application non triviale autre que celles présentées ici. Pour avoir d'autres minorations non triviales du plus petit commun multiple d'un nombre fini de termes consécutifs pour d'autres familles de suites, il faudrait peut être chercher de nouvelles identités attachées à ces suites.

Dans la dernière partie de la note, nous étudions le plus petit commun multiple d'un certain nombre d'entiers consécutifs, plus grands qu'un entier strictement positif donné. Nous montrons (voir Théorème 2.8) que le nombre $\mathrm{ppcm}\{n, n+1, \dots, n+k\}$ $(n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N})$ admet un diviseur $d_{n,k}$ simple en sa dépendance en n et k et un multiple $m_{n,k}$ simple en sa dépendance en n. L'originalité dans ce résultat est notre preuve du fait que $d_{n,k}$ et $m_{n,k}$ sont optimaux dans le sens où chacune des égalités $\mathrm{ppcm}\{n, \dots, n+k\} = d_{n,k}$ et $\mathrm{ppcm}\{n, \dots, n+k\} = m_{n,k}$ a lieu pour une infinité de couples (n,k). Plus précisément, nous montrons que chacune des deux égalités précédentes se reproduit au moins lorsque (n,k) vérifie une certaine congruence modulo $k!$.

2. Enoncés des résultats

2.1. Résultats de base

Lemme 2.1 *Soient $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ deux familles finies d'entiers non nuls, vérifiant :*

$$\sum_{i\in I}\frac{1}{\alpha_i\beta_i} = \frac{1}{\gamma}$$

pour un certain entier non nul γ. Alors, le nombre $\mathrm{ppcm}\{\alpha_i, i \in I\}.\mathrm{ppcm}\{\beta_i, i \in I\}$ est un multiple de γ.

Théorème 2.2 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers non nuls. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre :*

$$\mathrm{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\}.\mathrm{ppcm}\left\{\prod_{0\leq i\leq n, i\neq j}(u_i - u_j)\ ;\ j = 0, \dots, n\right\}$$

est un multiple du nombre $(u_0u_1\dots u_n)$.

2.2. Résultats sur les progressions arithmétiques

Théorème 2.3 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une progression arithmétique strictement croissante d'entiers non nuls tel que u_0 soit premier avec u_1. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre entier $\mathrm{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\}$ est un multiple du nombre rationnel $\frac{u_0\dots u_n}{n!}$.*

Si de plus, la congruence $u_0u_n \equiv 0 \bmod(n!)$ est satisfaite, on a même : $\mathrm{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} = \frac{u_0\dots u_n}{n!}$.

Théorème 2.4 *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une progression arithmétique d'entiers, de raison strictement positive r et dont le premier terme u_0 est strictement positif et premier avec r. Alors :*

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; u_0(r+1)^{n-1}$$

et si de plus n est un multiple de $(r+1)$, on a même :

$$\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; u_0(r+1)^{n}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; r(r+1)^{n-1}.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; \frac{n}{n+1} r \left\{(r+1)^{n-1} + (r-1)^{n-1}\right\}.$$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ satisfaisant $n \geq u_0 - \frac{3r+1}{2}$, on a :

$$\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; \frac{1}{\pi}\sqrt{r}(r+1)^{n-1+\frac{u_0}{r}}.$$

Conjecture 2.5 *Dans la situation du Théorème 2.4, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; u_0(r+1)^{n}.$$

Commentaires :

1) La Conjecture 2.5 améliore le point 1) du Théorème 2.4, qui affirme d'ailleurs qu'elle est vraie dans le cas particulier où n est un multiple de $(r+1)$. Cette même conjecture entraîne aussi le point 2) du même théorème.

2) Les minorations des points 1) et 2) du Théorème 2.4 peuvent s'assembler pour donner la minoration :

$$\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; \max\{u_0, r\}(r+1)^{n-1}.$$

Cette dernière minoration est équivalente à la série de minorations :

$$\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; \frac{u_k}{k+1}(r+1)^{n-1} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

3) Les points suivants sont faciles à vérifier :
   - La minoration proposée par la Conjecture 2.5 est optimale en l'exposant n de $(r+1)$.
   - La minoration du point 2) du Théorème 2.4 est optimale en l'exposant $(n-1)$ de $(r+1)$.
   - Pour les petites valeurs de n en fonction de r (plus précisément, lorsque $n \ll \frac{1}{2} r \log r$), la minoration du point 3) du Théorème 2.4 améliore celle du point 2) du même théorème.
   - Lorsque $r \ll u_0$, la minoration du point 4) du Théorème 2.4 entraîne toutes les autres minorations du même théorème, ainsi que la minoration de la Conjecture 2.5.

4) Les points suivants étudient l'optimalité du point 4) du Théorème 2.4. Leurs démonstration (assez technique) est basée sur une construction de progressions arithmétiques particulières.
   - Le coefficient $-\frac{3}{2}$ affecté à r qui apparaît dans la condition « $n \geq u_0 - \frac{3r+1}{2}$ » du point **4)** du Théorème 2.4 est optimal.
   - La constante absolue optimale C pour laquelle l'assertion :

     « Pour toute progression arithmétique $(u_k)_k$ comme dans le Théorème 2.4 et pour tout entier positif $n \geq u_0 - \frac{3r+1}{2}$, on a :
     $\operatorname{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \;\geq\; C\sqrt{r}(r+1)^{n-1+\frac{u_0}{r}}$ »

est vraie, vérifie :

$$\frac{1}{\pi} \ \leq \ C \ \leq \ \frac{3}{2}.$$

- Plus généralement, étant donné $n_0 \in \mathbb{N}$, la constante optimale $C(n_0)$ (dépendant uniquement de n_0) pour laquelle l'assertion :

  « Pour toute progression arithmétique $(u_k)_k$ comme dans le Théorème 2.4 et pour tout entier $n \geq \max\{n_0, u_0 - \frac{3r+1}{2}\}$, on a :
  $\mathrm{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \ \geq \ C(n_0)\sqrt{r}(r+1)^{n-1+\frac{u_0}{r}}$ »

  est vraie, vérifie :

$$\frac{1}{\pi} \ \leq \ C(n_0) \ < \ 4(n_0+4)\sqrt{n_0+4}.$$

2.3. **Résultats sur les suites quadratiques**

Théorème 2.6 *Soit* $\mathbf{u} = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'entiers relatifs dont le terme général est de la forme :*

$$u_k \ = \ ak(k+t)+b \qquad (\forall k \in \mathbb{N}),$$

avec $(a,t,b) \in \mathbb{Z}^3$*,* $a \geq 1$*,* $t \geq 0$ *et* $\mathrm{pgcd}\{a,b\} = 1$*.*
Soient aussi m *et* n *(avec* $m < n$*) deux entiers positifs tels qu'aucun terme* u_k $(m \leq k \leq n)$ *de la suite* $\mathbf{u}$ *ne soit nul. Alors le nombre entier* $\mathrm{ppcm}\{u_m, \dots, u_n\}$ *est un multiple du nombre rationnel :*

$$A_{\mathbf{u}}(t,m,n) \ := \ \begin{cases} 2\dfrac{u_0 \dots u_n}{(2n)!} & \text{si } (t,m) = (0,0) \\ (2m+t-1)!\dfrac{u_m \dots u_n}{(2n+t)!} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Corollaire 2.7 *Soient* $\mathbf{u} = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *une suite d'entiers relatifs comme dans le Théorème 2.6 précédent et* n *un entier strictement positif. Alors, si les* $(n+1)$ *premiers termes* $u_0, \dots, u_n$ *de la suite* $\mathbf{u}$ *sont tous non nuls, on a :*

$$\mathrm{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \ \geq \ \begin{cases} 2b\left(\dfrac{a}{4}\right)^n & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{b}{t2^t}\left(\dfrac{a}{4}\right)^n & \text{si } t \geq 1 \end{cases}.$$

2.4. **Résultats sur le plus petit commun multiple d'un nombre fini d'entiers consécutifs**

Théorème 2.8 *Pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *et tout* $n \in \mathbb{N}^*$*, le nombre* $\mathrm{ppcm}\{n, n+1, \dots, n+k\}$ *est multiple de l'entier* $n\binom{n+k}{k}$ *et divise l'entier* $n\binom{n+k}{k}\mathrm{ppcm}\left\{\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \dots, \binom{k}{k}\right\}$*. De plus :*
— si la congruence $n(n+k) \equiv 0 \bmod (k!)$ *est satisfaite, on a :*

$$\mathrm{ppcm}\{n, n+1, \dots, n+k\} \ = \ n\binom{n+k}{k},$$

— et si la congruence $n+k+1 \equiv 0 \bmod (k!)$ *est satisfaite, on a :*

$$\mathrm{ppcm}\{n, n+1, \dots, n+k\} \ = \ n\binom{n+k}{k}\mathrm{ppcm}\left\{\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \dots, \binom{k}{k}\right\}.$$

De ce théorème s'ensuit assez facilement l'encadrement bien connu $2^{n-1} \leq \mathrm{ppcm}\{1, \dots, n\} \leq 4^{n-1}$ (pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

3. Une esquisse de la preuve de nos résultats

Le Lemme 2.1 est immédiat. Le Théorème 2.2 est une conséquence directe de l'application du Lemme 2.1 à l'identité :

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{1}{u_j} \cdot \frac{1}{\prod\limits_{0 \leq i \leq n, i \neq j} (u_i - u_j)} = \frac{1}{u_0 \dots u_n} ,$$

qui s'obtient en substituant x par 0 dans la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $x \mapsto \frac{1}{(x+u_0)\dots(x+u_n)}$.

La première partie du Théorème 2.3 est une application directe du Théorème 2.2, quant à la deuxième partie du même théorème (prouvant l'optimalité de la première partie), elle s'obtient en montrant d'abord l'implication « $u_0 u_n \equiv 0 \mod(n!) \Rightarrow u_0 \equiv 0 \mod(n) \wedge u_n \equiv 0 \mod(n)$ », puis en manipulant les congruences modulo u_0 et u_n.

Le Théorème le plus important 2.4 s'obtient de la manière suivante :
On part du fait que $\mathrm{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\}$ est multiple de $\mathrm{ppcm}\{u_k, \dots, u_n\}$ pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$ et que (d'après le Théorème 2.3) ce dernier nombre est multiple de $v_k := \frac{u_k \dots u_n}{(n-k)!}$. Par suite, pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $\mathrm{ppcm}\{u_0, \dots, u_n\} \geq v_k$. L'idée consiste à choisir l'entier k (en fonction de n, r et u_0) qui maximise (ou presque) la quantité v_k. Ainsi, la minoration du premier point du Théorème 2.4 s'obtient en prenant $k = [\frac{n-1}{r+1} + 1]$ (lorsque n est quelconque) et $k = \frac{n}{r+1}$ (lorsque n est multiple de $(r+1)$) et la minoration du quatrième point du même théorème s'obtient en prenant k l'entier positif le plus proche du réel $\frac{n+r-u_0}{r+1}$. Quant aux minorations des points 2) et 3) du Théorème 2.4, elles s'obtiennent pour des valeurs non explicites de k, elles proviennent plus exactement des minorations des moyennes arithmétiques des deux suites finies $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(v_k)_{1 \leq k \leq n,\ k \text{ impair}}$.

Le Théorème 2.6 est une application directe du Théorème 2.3 et le Corollaire 2.7 provient du Théorème 2.6 et des majorations simples de coefficients binomiaux.

Pour ce qui concerne le Théorème 2.8, le fait que « $d_{n,k} := n\binom{n+k}{k}$ soit un diviseur optimal de $\mathrm{ppcm}\{n, \dots,\ n+k\}$ » est une conséquence immédiate du Théorème 2.3 et le fait que « $m_{n,k} := n\binom{n+k}{k}\mathrm{ppcm}\{\binom{k}{0}, \dots, \binom{k}{k}\}$ soit un multiple de $\mathrm{ppcm}\{n, \dots, n+k\}$ » s'obtient assez facilement en utilisant une simple propriété des coefficients binomiaux. L'optimalité de $m_{n,k}$ est un point réellement délicat du théorème. Pour le prouver, on est amené à étudier la suite d'applications $(g_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ définie par $g_\ell(n) := \frac{n\dots(n+\ell)}{\mathrm{ppcm}\{n,\dots,n+\ell\}}$ (pour tous $\ell \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$). On a montré que $(g_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence :

$$g_\ell(n) = \mathrm{pgcd}\,\{\ell!\ ,\ (n+\ell)g_{\ell-1}(n)\} \qquad (\text{pour tout } (\ell, n) \in {\mathbb{N}^*}^2)$$

qui, une fois itérée $(k-1)$ fois en partant de $g_k(n)$, donne, sous l'hypothèse $n + k + 1 \equiv 0 \mod(k!)$, le résultat $\mathrm{ppcm}\{n, \dots, n+k\} = m_{n,k}$.

Références

[1] D. Hanson. On the product of the primes. *Canad. Math. Bull,* **15** (1972), p. 33-37.

[2] G. H. Hardy & E. M. Wright. The theory of numbers. Oxford Univ. Press, London, 5th ed, (1979).

[3] M. Nair. On Chebyshev-type inequalities for primes. *Amer. Math. Monthly,* **89** (1982), n2, p. 126-129.