C. R. Acad. Sci. Paris,
Sér. **I 341** (2005), p. 275-278.

Un analogue elliptique du théorème de Roth

An elliptic analogue of Roth's theorem

Bakir Farhi [a]

[a] *Département de Mathématiques, Université du Maine, Avenue Olivier Messiaen, 72085 Le Mans Cedex 9, France*

Résumé

Nous présentons ici des versions quantitatives en dimension 1 du théorème de Faltings selon lequel l'ensemble des points K-rationnels (où K est un corps de nombres donné) d'une variété abélienne A définie sur K qui sont proches (au sens d'une distance v-adique sur K) d'une K-sous-variété X de A, sans appartenir à X, est fini. Nous traitons plus exactement le cas où A est une courbe elliptique et X est réduite à un point de A et nous donnons (dans ce cas) des majorations explicites pour le cardinal de l'ensemble fini en question. Nous considérons aussi, plus généralement, au lieu d'une seule place v de K, un ensemble fini S de places de K et la distance des points de A à X tenant compte de toutes les places de S.

Abstract

We present here quantitative versions in 1 dimension of Faltings' theorem according to which the set of the points K-rational (where K is a given number field) of an abelian variety A defined over K, which are close (with respect to a v-adic distance on K) to some K-subvariety X of A, but not belonging to X, is finite. We treat more exactly the case where A is an elliptic curve and X is reduced to a point of A and we give (in this case) explicit bounds for the cardinal of the exceptional finite set. We consider also, more generally, instead of only one place v of K, a finite set S of places of K and the distance from the point of A to X taking into account of all the places of S.

---

1. Introduction

Dans [1], Faltings a démontré que pour toute variété abélienne A définie sur un corps de nombres K, pour toute sous-variété X de A (définie aussi sur K), pour tout $\varepsilon > 0$ et pour toute place v de K, il n'existe qu'un nombre fini de points K-rationnels $\mathbf{x}$ de $A \setminus X$ satisfaisant l'inégalité $\mathrm{dist}_v(\mathbf{x}, X) < H(\mathbf{x})^{-\varepsilon}$ (où H est la hauteur multiplicative de Weil relative à un diviseur ample fixé sur A et dist_v est une distance

Email address: Bakir.Farhi@univ-lemans.fr (Bakir Farhi).

Preprint submitted to Elsevier Science

v-adique sur A). Comme l'a fait remarqué Faltings, lorsque A est plongée dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$ et $(L_i)_i$ désigne un système d'équations définissant X, on peut prendre à la place de $\text{dist}_v(\mathbf{x}, X)$ le maximum des normes v-adiques des nombres $L_i(\mathbf{x})_i$.

Ce résultat de Faltings peut être vu comme l'équivalent du théorème de Roth [3] pour le groupe additif $\mathbb{G}_a$, où l'exposant de $H(\mathbf{x})$ est alors $-2-\varepsilon$ (qui est le meilleur possible). On doit préciser que c'est la technique de localisation des points dans des cônes de Vojta [4] (déja utilisée par Mumford [2]) qui permet d'améliorer l'exposant $-2-\varepsilon$ en $-\varepsilon$ (qui est le meilleur possible pour une variété abélienne).

En ce qui nous concerne, nous prenons comme variété abélienne une courbe elliptique E plongée dans $\mathbb{P}^2$ à la Weierstrass et comme sous-variété de E le point à l'infini $\mathbf{0}$ de E. Dans ce cas particulier, nous démontrons avec une méthode plus élémentaire le théorème de Faltings sus-cité et nous donnons un résultat effectif en estimant explicitement le nombre fini de points exceptionnels. Plus généralement, nous considérons au lieu d'une seule place v de K, un ensemble fini S de places de K et nous remplaçons ainsi l'inégalité $\text{dist}_v(\mathbf{x}, E) < H(\mathbf{x})^{-\varepsilon}$ par un système d'inégalités simultanées $\text{dist}_v(\mathbf{x}, E) < H(x)^{-\lambda_v \varepsilon}$ $(v \in S)$, où les λ_v $(v \in S)$ sont des réels positifs satisfaisant $\sum_{v\in S} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\lambda_v = 1$ (voir les théorèmes ci-dessous).

2. Préparation

Soit E une courbe elliptique définie sur un corps de nombres K, plongée à la Weierstrass dans le plan projectif $\mathbb{P}^2$, d'équation projective $Y^2Z = 4X^3 - g_2X - g_3$ $(g_2, g_3 \in K)$ et d'élément neutre (en tant que groupe) son point à l'infini $\mathbf{0}$ représenté dans $\mathbb{P}^2$ par les coordonnées projectives $(0 : 1 : 0)$. On désigne par r le rang de Mordell-Weil de $E(K)$, que l'on suppose non nul.

On note M_K l'ensemble des places v de K, normalisées de sorte que $|2|_v = 2$ lorsque v est infini et $|p|_v = p^{-1}$ lorsque v est finie et étend la place p de $\mathbb{Q}$.

Hauteurs et distances utilisées :

1) Étant donné un point $\mathbf{x}$ de $E(K)$ représenté dans $\mathbb{P}_2(K)$ par un système de coordonnées projectives $(x_0 : x_1 : x_2)$, on appelle respectivement « hauteur logarithmique de Weil de $\mathbf{x}$ », « hauteur de Néron-Tate de $\mathbf{x}$ » et « norme de Néron-Tate de $\mathbf{x}$ » les réels positifs :

$$h(\mathbf{x}) := \sum_{v\in M_K} \frac{[K_v : \mathbb{Q}_v]}{[K : \mathbb{Q}]} \log\max\left\{|x_0|_v, |x_1|_v, |x_2|_v\right\} \quad , \quad \widehat{h}(\mathbf{x}) := \lim_{n\to+\infty} \frac{h(n.\mathbf{x})}{n^2} \quad \text{et} \quad |\mathbf{x}| := \sqrt{\widehat{h}(\mathbf{x})}.$$

2) Étant donné maintenant deux points $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ de $E(K)$ représentés respectivement dans $\mathbb{P}_2(K)$ par les systèmes de coordonnées projectives $(x_0 : x_1 : x_2)$ et $(y_0 : y_1 : y_2)$ et une place v de K, on appelle « distance v-adique de $\mathbf{x}$ à $\mathbf{y}$ » que l'on note $\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, le réel positif :

$$\text{dist}_v(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ := \ \frac{\max\left(|x_0y_1 - x_1y_0|_v, |x_0y_2 - x_2y_0|_v, |x_1y_2 - x_2y_1|_v\right)}{\max\left(|x_0|_v, |x_1|_v, |x_2|_v\right).\max\left(|y_0|_v, |y_1|_v, |y_2|_v\right)}.$$

On pose, pour toute place v de K, $m_v := \log\max\{1, |g_2|_v, |g_3|_v\}$. On pose aussi η la hauteur logarithmique de Weil du point projectif $(1 : g_2 : g_3)$ et on fixe finalement un sous-ensemble fini S de M_K et une famille $(\lambda_v)_{v\in S}$ de réels positifs satisfaisant : $\sum_{v\in S} \frac{[K_v:\mathbb{Q}_v]}{[K:\mathbb{Q}]}\lambda_v = 1$.

3. Résultats

Si, dans la méthode utilisée, on permet au système d'inégalités simultanées de dépendre de η ou de r, on peut majorer le cardinal de l'ensemble des points exceptionnels, uniquement en fonction de ε et de r. On obtient le théorème suivant :

Théorème 3.1 *Pour tout* $0 < \varepsilon < 2^{-14}$*, posons :*

$$(A_1, B_1) := \left(1 + \frac{188}{\log|\log\varepsilon|} \ , \ 4\varepsilon^{-r}\right)$$
$$(A_2, B_2) := \left(\frac{r}{2}\left(\log r + \log|\log\varepsilon| + 17\right) \ , \ r^2\left(\log r + \log|\log\varepsilon| + 83\right)\right).$$

Alors, pour $i \in \{1, 2\}$*, l'ensemble des points* $\mathbf{x}$ *de* $E(K)$ *satisfaisant le système d'inégalités simultanées :*

$$dist_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \exp\left\{-\lambda_v\left(\varepsilon h(\mathbf{x}) + (\eta + 5)\varepsilon^{-A_i}\right) - 2m_v - 16\right\} \qquad (v \in S) \tag{1}$$

est fini et de cardinal majoré par :

$$2B_i\varepsilon^{-\frac{1}{2}}|\log\varepsilon|^2\left(499\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)^r.$$

Si, par contre, on veut absolument avoir (comme dans [1]) un résultat dans lequel le système d'inégalités simultanées soit indépendant de η et de r, on est forcé à faire intervenir dans la majoration du cardinal de l'ensemble des points exceptionnels de nouveaux paramètres comme le cardinal de l'ensemble $E(K)_{\mathrm{tor}}$ des points de torsion de $E(K)$ et la plus petite valeur non nulle des hauteurs de Néron-Tate des points de $E(K)$ (que l'on note $\widehat{h}_{\min}$). On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Pour tout* $0 < \varepsilon < 2^{-14}$*, l'ensemble des points* $\mathbf{x}$ *de* $E(K)$ *satisfaisant le système d'inégalités simultanées :*

$$dist_v(\mathbf{x}, \mathbf{0}) < \exp\left\{-\lambda_v\varepsilon h(\mathbf{x}) - 2m_v - 16\right\} \qquad (v \in S) \tag{2}$$

est fini et de cardinal majoré par :

$$\left(\mathrm{card}\left(E(K)_{\mathrm{tor}}\right) + \varepsilon^{-\frac{1}{2}}\right)\left(1 + \frac{15(\eta+4)^{\frac{1}{2}}}{\widehat{h}_{\min}^{\frac{1}{2}}}\right)^r\left(\varepsilon^{-\frac{1}{2} - \frac{92}{\log|\log\varepsilon|}}\right)^r.$$

4. Une esquisse de la preuve de nos théorèmes

La preuve des deux théorèmes précédents est basée sur les deux inégalités suivantes :

Inégalité de la hauteur à la Vojta : *Soient* $\varepsilon > 0$ *un réel et* $m \geq 2$ *un entier. Il existe des constantes* $\theta_1 \in]0, \pi/2[$, $R_1 > 0$ *et* $c_1 > 1$*, dépendants uniquement de* ε, m *et* η *tels que pour tout* m*-uplet* $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ *constitué de points de* $E(K)$*, contenus dans un même cône d'angle* $\leq \theta_1$ *de l'espace euclidien* $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$ *et satisfaisant* $R_1 \leq \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \leq \ldots \leq \widehat{h}(\mathbf{x}_m)$ *ainsi que le système d'inégalités simultanées (2), on a l'une au moins des inégalités :* $\widehat{h}(\mathbf{x}_i) \leq c_1\widehat{h}(\mathbf{x}_{i-1})$ $(2 \leq i \leq m)$.

Inégalité de la hauteur à la Mumford : *Soit* $\varepsilon > 0$ *un réel. Il existe des constantes* $\theta_2 \in]0, \pi/2[$, $R_2 > 0$ *et* $c_2 > 1$*, dépendants uniquement de* ε *et* η *tels que pour tout couple* $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ *de points distincts de* $E(K)$*, contenus dans un même cône d'angle* $\leq \theta_2$ *de* $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ *et satisfaisant* $R_2 \leq \widehat{h}(\mathbf{x}_1) \leq \widehat{h}(\mathbf{x}_2)$ *ainsi que le système d'inégalités simultanées (2), on a :* $\widehat{h}(\mathbf{x}_2) \geq c_2\widehat{h}(\mathbf{x}_1)$.

Ces deux inégalités sont à fortiori vraies lorsque le système (2) est remplacé par le système (1). En liant les inégalités de la hauteur à la Vojta et à la Mumford, on obtient un décompte pour l'ensemble des points de $E(K)$ satisfaisant le système (1) (ou (2)), se situant dans un même petit cône de $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ et qui sont de hauteur de Néron-Tate assez grande. Pour conclure la preuve de nos théorèmes, nous recouvrons l'espace euclidien $E(K) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^r$ par un nombre fini de tels cônes. Le théorème 3.1 s'ensuit alors d'une certaine inégalité de Liouville qui permet de montrer que le point à l'infini $\mathbf{0}$ de E est l'unique point de petite hauteur de $E(K)$ satisfaisant (1), quant au théorème 3.2, il est consquence d'une majoration (en fonction de card $(E(K)_{\mathrm{tor}})$ et $\widehat{h}_{\min}$) du nombre de points de petite hauteur de $E(K)$.

Nous présentons maintenant ci-dessous les ingrédients de la démonstration de l'inégalité de la hauteur à la Vojta. L'inégalité de la hauteur à la Mumford s'obtient plus facilement en suivant les mêmes étapes.

Ingrédients de la preuve de l'inégalité de la hauteur à la Vojta : On procède par l'absurde et on introduit les entiers positifs $a_i := [|\mathbf{x}_m|/|\mathbf{x}_i|]$ $(1 \leq i \leq m)$ et les points $\mathbf{y}_i := a_i\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m$ $(1 \leq i \leq m-1)$ de $E(K)$. On considère ensuite le plongement éclatant :

$$\begin{aligned} \psi : E^m \ &\hookrightarrow \ E^{2m-1} \\ (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m) &\longmapsto (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m, a_1\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_m, \ldots, a_{m-1}\mathbf{p}_{m-1} - \mathbf{p}_m) \end{aligned}$$

et on appelle φ le plongement composé de ψ et du plongement (à la Weierstrass) de E^{2m-1} dans $(\mathbb{P}^2)^{2m-1}$.

On se donne des paramètres $\varepsilon_0, \varepsilon_1$ et δ (avec $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}_+^*, \varepsilon_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\delta \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_0\delta \in \mathbb{N}$) auxquels on impose quelques contraintes indispensables pour le bon fonctionnement de ce qui va suivre. Les paramètres ε_0 et ε_1 seront choisis à la fin de la preuve en fonction de m et de ε, tandis que le paramètre δ est destiné à tendre vers l'infini. Le schéma de cette preuve comporte les trois étapes suivantes :

1) On construit par le lemme de Siegel classique une forme non identiquement nulle P sur $\varphi(E^m)$ qui s'annule au point $(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ avec un indice [1] $\geq \varepsilon_1\delta$ relativement aux entiers positifs $a_1^2, \ldots, a_m^2$, qui soit de multidegré $(\varepsilon_0\delta a_1^2, \ldots, \varepsilon_0\delta a_m^2, \delta, \ldots, \delta)$ et de hauteur majorée par son degré total.

2) En utilisant l'hypothèse concernant la petitesse des distances v-adiques $(v \in S)$ des points $\mathbf{x}_i$ par rapport au point à l'infini $\mathbf{0}$ de E (c'est-à-dire le système d'inégalités simultanées (2)) ainsi qu'une certaine contrainte liant ε_0 et ε_1, on montre que P s'annule aussi au point $\psi(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ avec un indice $\geq \frac{1}{2}\varepsilon_1\delta$ relativement aux entiers positifs $a_1^2, \ldots, a_m^2$.

3) En tirant P sur E^m, on obtient une forme Q de multidegré $((2+\varepsilon_0)\delta a_1^2, \ldots, (2+\varepsilon_0)\delta a_{m-1}^2, (2m - 2 + \varepsilon_0)\delta)$, qui s'annule en $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ avec un indice $\geq \frac{1}{2}\varepsilon_1\delta$ et dont la hauteur est majorée par δa_1^2 (à une constante multiplicative près dépendant uniquement de η).

Le choix des a_i et l'hypothèse absurde concernant l'espacement des hauteurs des points $\mathbf{x}_i$ entraînent que les degrés de Q sont assez espacés, ce qui est l'hypothèse cruciale du théorème du produit de Faltings qui permet ainsi de conclure que le point $(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m)$ est contenu dans une variété produit et propre $V = V_1 \times \ldots \times V_m$ de E^m dont les degrés et les hauteurs sont bien contrôlées.

Le fait que V soit propre entraîne qu'il existe $j \in \{1, \ldots, m\}$ pour lequel on a $V_j = \{\mathbf{x}_j\}$. Le contrôle de la hauteur de V_j fournit par le théorème du produit aboutira à une contradiction avec le fait que le point $\mathbf{x}_j$ soit de hauteur assez grande.

Remerciements

Je tiens à remercier M. Patrice Philippon pour son aide tout au long de ce travail.

Références

[1] G. Faltings. Diophantine approximation on abelian varieties, *Ann. Math.,* **133** (1991), p. 549-576.

[2] D. Mumford. A remark on Mordell's conjecture, *Amer. J. Math.,* **87** (1965), p. 1007-1016.

[3] K. F. Roth. Rational approximation to algebraic numbers, *Mathematika,* **2** (1955), p. 1-20.

[4] P. Vojta. Siegel's theorem in the compact case, *Ann. Math.,* **133** (1991), p. 509-548.

1. Celà veut dire que tout coefficient de Taylor d'ordre $(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}^m$ de la série obtenue à partir de P composé avec une certaine paramétrisation de la variété $\varphi(E^m)$ au voisinage de $(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})$ est nul dès que $\frac{i_1}{a_1^2} + \ldots + \frac{i_m}{a_m^2} \leq \varepsilon_1\delta$.