INSTITUT DE FRANCE
Académie des sciences

Comptes Rendus

Mathématique

Sid Ali Bousla et Bakir Farhi

Identités et estimations concernant le plus petit commun multiple de suites à forte divisibilité

Volume 358, issue 4 (2020), p. 481-487.

<https://doi.org/10.5802/crmath.64>

Comptes Rendus
Mathématique
2020, 358, n° 4, p. 481-487
https://doi.org/10.5802/crmath.64

Théorie des nombres / *Number Theory*

Identités et estimations concernant le plus petit commun multiple de suites à forte divisibilité

Identities and estimations involving the least common multiple of strong divisibility sequences

Sid Ali Bousla[a] **et Bakir Farhi**[*, a]

[a] Laboratoire de Mathématiques appliquées, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, 06000 Bejaia, Algérie.

Courriels : bouslasidali@gmail.com, bakir.farhi@gmail.com.

Résumé. Dans cette note, nous montrons d'abord que pour toute suite à forte divisibilité $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$, on a l'identité: $\operatorname{ppcm}\left\{\binom{n}{0}_{\boldsymbol{a}}, \binom{n}{1}_{\boldsymbol{a}}, \dots, \binom{n}{n}_{\boldsymbol{a}}\right\} = \frac{\operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})}{a_{n+1}}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, généralisant l'identité de Farhi (obtenue en 2009 pour $a_n = n$). Par suite, nous en déduisons quelques autres identités intéressantes. Finalement, nous appliquons ces identités pour estimer le plus petit commun multiple des termes consécutifs de certaines suites de Lucas. En désignant par $(F_n)_n$ la suite de Fibonacci usuelle, nous montrons par exemple que pour tout entier $n \geq 1$, on a:

$$\Phi^{\frac{n^2}{4} - \frac{9}{4}} \leq \operatorname{ppcm}(F_1, \dots, F_n) \leq \Phi^{\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3}},$$

où Φ désigne le nombre d'or.

Abstract. In this note, we first prove that for any strong divisibility sequence $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$, we have the identity: $\operatorname{lcm}\left\{\binom{n}{0}_{\boldsymbol{a}}, \binom{n}{1}_{\boldsymbol{a}}, \dots, \binom{n}{n}_{\boldsymbol{a}}\right\} = \frac{\operatorname{lcm}(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})}{a_{n+1}}$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$, generalizing the identity of Farhi (obtained in 2009 for $a_n = n$). Then, we derive from it other interesting identities. Finally, we apply those identities to estimate the least common multiple of the consecutive terms of some Lucas sequences. Denoting by $(F_n)_n$ the usual Fibonacci sequence, we prove for example that for every positive integer n, we have:

$$\Phi^{\frac{n^2}{4} - \frac{9}{4}} \leq \operatorname{lcm}(F_1, \dots, F_n) \leq \Phi^{\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3}},$$

where Φ denotes the golden ratio.

Manuscrit reçu le 18 décembre 2019, révisé le 20 avril 2020, accepté le 27 avril 2020.

* Auteur correspondant.

Abridged English version

A sequence of positive integers $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ is said to be *a divisibility sequence* if it satisfies, for all $n, m \geq 1$, the property : $n \mid m \Rightarrow a_n \mid a_m$. It is said to be *a strong divisibility sequence* if it satisfies, for all $n, m \geq 1$, the stronger property : $\gcd(a_n, a_m) = a_{\gcd(n,m)}$. Let $\boldsymbol{a}$ be a strong divisibility sequence. Then for any $n \in \mathbb{N}$, we let $[n]_{\boldsymbol{a}}!$ denote the positive integer $[n]_{\boldsymbol{a}}! := a_1 a_2 \cdots a_n$ (with the convention $[0]_{\boldsymbol{a}}! = 1$). Next, for $n, k \in \mathbb{N}$, with $n \geq k$, we let $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}$ denote the positive rational number $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}} := \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_{n-k+1}}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \frac{[n]_{\boldsymbol{a}}!}{[k]_{\boldsymbol{a}}![n-k]_{\boldsymbol{a}}!}$. Actually, these numbers are all integers (see e.g., [9, 14]) ; we call them *the $\boldsymbol{a}$-binomial coefficients*. Note that the usual binomial coefficients are simply obtained by taking $a_n = n$ and the gaussian binomial coefficients $\binom{n}{k}_q$ (also called the q-binomial coefficients) are obtained by taking $a_n = q^n - 1$ (where $q \geq 2$ is an integer). An important example of strong divisibility sequences consists of a special class of Lucas sequences. Precisely, when P and Q are coprime non-zero integers and $U(P,Q)$ denotes their associated Lucas sequence, defined recursively by : $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ and $U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n$ ($\forall\ n \in \mathbb{N}$), then the sequence $|U(P,Q)|$ is a strong divisibility sequence (see e.g., [12]). The general structure of the divisibility sequences was the area of interest of several authors at least since the second half of the 20$^{\text{th}}$ century. In 1936, Ward [14] investigated the p-adic valuation of such sequences and discovered the property that for any strong divisibility sequence $\boldsymbol{a}$, the $\boldsymbol{a}$-binomial coefficients are all positive integers. In 1990, Bézivin et al. [1] established a complete characterization of divisibility sequences which are linear recurrent. Quite recently, Bliss et al. [2] have shown the result (implicitly appearing in the earlier paper [7] of Kimberling) that the general term of a strong divisibility sequence $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ can always be made in the form : $a_n = \prod_{d \mid n} u_d$ ($\forall\ n \geq 1$), for some sequence of positive integers $(u_n)_{n\geq 1}$. This result allowed the authors of [2] to establish (in the same context) an important nontrivial formula of $(u_n)_n$ in terms of $(a_n)_n$. Although the converse of their result is not true, Bliss et al. [2] successed to establish a necessary and sufficient condition for a sequence $\boldsymbol{u} = (u_n)_{n\geq 1}$ so that the sequence $\boldsymbol{a}$ defined by $a_n = \prod_{d \mid n} u_d$ ($\forall\ n \geq 1$) be a strong divisibility sequence. This condition is : "$\forall\ n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ such that $n \nmid m$ and $m \nmid n$, we have : $\gcd(u_n, u_m) = 1$". Further development of this condition, which is crucial for our purpose, is given by Nowicki [11] (see Theorem 7).

This note is devoted to investigate some gcd and lcm properties of the $\boldsymbol{a}$-binomial coefficients (where $\boldsymbol{a}$ is a strong divisibility sequence). Precisely, we prove that for any strong divisibility sequence $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$, we have the following three identities :

$$\operatorname{lcm}\left\{\binom{n}{0}_{\boldsymbol{a}}, \binom{n}{1}_{\boldsymbol{a}}, \ldots, \binom{n}{n}_{\boldsymbol{a}}\right\} = \frac{\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})}{a_{n+1}},$$

$$\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \operatorname{lcm}\left\{a_1\binom{n}{1}_{\boldsymbol{a}}, a_2\binom{n}{2}_{\boldsymbol{a}}, \ldots, a_n\binom{n}{n}_{\boldsymbol{a}}\right\},$$

$$\operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \gcd\left\{\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}} \operatorname{lcm}(a_1, a_2, \ldots, a_k);\ n/2 \leq k \leq n\right\}$$

(see Theorem 1 and Corollary 2). In particular, the first identity generalizes the identity obtained by Farhi [4] (for $a_n = n$). As an application, we use these identities to derive nontrivial effective estimates for the least common multiple of the consecutive terms of a special class of Lucas sequences. We prove that if P and Q are coprime non-zero integers such that $P^2 - 4Q > 0$ and $U(P,Q)$ is their associated Lucas sequence, then we have for every positive integer n :

$$|\alpha|^{\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1} \leq \operatorname{lcm}(U_1, U_2, \ldots, U_n) \leq |\alpha|^{\frac{n^2}{3} + \frac{7n}{3} - \frac{8}{3}},$$

where α is the largest root in absolute value of the quadratic equation : $X^2 - PX + Q = 0$ (see Theorem 4). The goodness of these effective estimates is insured by the asymptotic estimates obtained by Matiyasevich and Guy [10] and Kiss and Matyas [8] for the least common multiple of the same type of sequences.

1. Introduction et notations

Tout au long de cette note, on désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière d'un nombre réel x. Une suite d'entiers strictement positifs $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geq 1}$ est dite *à divisibilité* lorsqu'elle vérifie la propriété : $n \mid m \Rightarrow a_n \mid a_m$ ($\forall\ n, m \in \mathbb{N}^*$). Elle est dite *à forte divisibilité* lorsqu'elle vérifie la propriété plus forte : $\operatorname{pgcd}(a_n, a_m) = a_{\operatorname{pgcd}(n,m)}$ ($\forall\ n, m \in \mathbb{N}^*$). Etant donné une suite à forte divisibilité $\boldsymbol{a}$, pour tout entier naturel n, on désigne par $[n]_{\boldsymbol{a}}!$ l'entier strictement positif défini par $[n]_{\boldsymbol{a}}! := a_1 a_2 \cdots a_n$ (en convenant que $[0]_{\boldsymbol{a}}! = 1$). Pour $n, k \in \mathbb{N}$, avec $n \geq k$, on désigne par $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}$ le nombre rationnel strictement positif défini par : $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}} := \frac{a_n a_{n-1} \cdots a_{n-k+1}}{a_1 a_2 \cdots a_k} = \frac{[n]_{\boldsymbol{a}}!}{[k]_{\boldsymbol{a}}! [n-k]_{\boldsymbol{a}}!}$. Il est bien connu que ces nombres rationnels $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}$ sont tous des entiers (voir par exemple [9, 14]) ; on les nomme *les coefficients $\boldsymbol{a}$-binomiaux*. Il est à noter que les coefficients binomiaux usuels s'obtiennent en prenant simplement $a_n = n$ et que les coefficient binomiaux de Gauss (aussi appelés les coefficients q-binomiaux) s'obtiennent en prenant $a_n = q^n - 1$ (où $q \geq 2$ est un entier). Un important exemple de suites à forte divisibilité nous est fourni par une classe spéciale de suites de Lucas. Plus précisément, en prenant P et Q des entiers non nuls et premiers entre eux et en désignant par $U(P, Q)$ leur suite de Lucas associée, c'est-à-dire la suite d'entiers définie récursivement par : $U_0 = 0$, $U_1 = 1$ et $U_{n+2} = PU_{n+1} - QU_n$ ($\forall\ n \in \mathbb{N}$), on montre que la suite $|U(P, Q)|$ est à forte divisibilité (voir par exemple [12]). Particulièrement, la suite de tous les entiers positifs (qu'on obtient en prenant $(P, Q) = (2, 1)$) et la suite de Fibonacci usuelle (qu'on obtient en prenant $(P, Q) = (1, -1)$) sont des suites à forte divisibilité. Pour en savoir plus sur le sujet des suites de Lucas, le lecteur est invité à consulter le livre de Honsberger [6].

La structure générale des suites à divisibilité a été le centre d'intérêt de plusieurs auteurs au moins depuis la seconde moitié du $20^{\text{ème}}$ siècle. En 1936, Ward [14] étudie les valuations p-adiques de ces suites et découvre la propriété selon laquelle les coefficients $\boldsymbol{a}$-binomiaux sont tous des entiers pour une suite à forte divisibilité $\boldsymbol{a}$. En 1990, Bézivin et al. [1] ont établi une caractérisation complète des suites à divisibilité qui sont récurrentes linéaires. Assez récemment, Bliss et al. [2] ont montré le résultat (figurant déjà implicitement dans un article antérieur de Kimberling [7]) selon lequel « le terme général d'une suite à forte divisibilité $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n \geq 1}$ peut toujours s'écrire sous la forme : $a_n = \prod_{d \mid n} u_d$ ($\forall\ n \geq 1$), pour une certaine suite d'entiers strictement positifs $(u_n)_{n \geq 1}$ ». Ce résultat a permis aux auteurs de [2] d'établir (dans le même contexte) une expression importante de $(u_n)_{n \geq 1}$ en fonction de $(a_n)_{n \geq 1}$, différente de celle qui s'obtient via la formule d'inversion de Möbius. Bien que la réciproque de leur résultat soit fausse, Bliss et al. [2] ont réussi à établir une condition nécessaire et suffisante sur une suite $\boldsymbol{u} = (u_n)_{n \geq 1}$ pour que la suite $\boldsymbol{a}$ définie par $a_n = \prod_{d \mid n} u_d$ ($\forall\ n \geq 1$) soit à forte divisibilité. Cette condition est : « $\forall\ n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $n \nmid m$ et $m \nmid n$, on a : $\operatorname{pgcd}(u_n, u_m) = 1$ ». Une autre condition plus pratique, équivalente à celle-ci, a été établie tout récemment par Nowicki [11] (voir le théorème 7).

Par ailleurs, l'étude des propriétés arithmétiques des coefficients binomiaux est un sujet très ancien et fascinant. À titre d'exemple, il y a plus d'un siècle que Sylvester [13] prouvait que pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, tels que $n \geq 2k$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ possède au moins un diviseur premier strictement supérieur à k. Assez récemment, Farhi [4] a montré l'identité $\operatorname{ppcm}\left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right\} = \frac{\operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,n,n+1)}{n+1}$ ($\forall\ n \in \mathbb{N}$), que Guo [5] a généralisé aux coefficients q-binomiaux. Dans cette note, nous démontrons une identité plus générale relative aux suites à forte divisibilité. Cette identité englobe les identités ci-dessus de Farhi et Guo qui en deviennent des cas particuliers (voir le théorème 1 et la remarque 3). Nous en déduisons par suite deux autres identités également intéressantes (voir le corollaire 2). Comme application, nous utilisons nos identités pour établir des estimations effectives et non triviales du plus petit commun multiple des termes consécutifs de certaines suites de Lucas (voir le théorème 4). L'efficacité de nos estimations effectives est garantie par les estimations asymptotiques obtenues par Matiyasevich et Guy [10] et Kiss et Matyas [8] dans le même contexte.

2. Résultats

Théorème 1. *Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite à forte divisibilité. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\mathrm{ppcm}\left\{\binom{n}{0}_{\boldsymbol{a}}, \binom{n}{1}_{\boldsymbol{a}}, \ldots, \binom{n}{n}_{\boldsymbol{a}}\right\} = \frac{\mathrm{ppcm}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})}{a_{n+1}}. \tag{1}$$

Corollaire 2. *Soit $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite à forte divisibilité. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$\mathrm{ppcm}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{ppcm}\left\{a_1\binom{n}{1}_{\boldsymbol{a}}, a_2\binom{n}{2}_{\boldsymbol{a}}, \ldots, a_n\binom{n}{n}_{\boldsymbol{a}}\right\}, \tag{2}$$

$$\mathrm{ppcm}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{pgcd}\left\{\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}} \mathrm{ppcm}\,(a_1, \ldots, a_k)\,;\; n/2 \leq k \leq n\right\}. \tag{3}$$

Remarque 3. En prenant dans le théorème 1 $a_n = n$ ($\forall\ n \geq 1$), on obtient l'identité de Farhi [4] selon laquelle on a pour tout entier naturel n : $\mathrm{ppcm}\left\{\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}\right\} = \frac{\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n,n+1)}{n+1}$. Par ailleurs, on démontre aisément que le théorème 1 et le corollaire 2 restent valables dans tout anneau factoriel $\mathscr{A}$, pris à la place de $\mathbb{Z}$ (nous renvoyons le lecteur à l'article de Bliss et al. [2] pour la définition et les propriétés des suites à forte divisibilité dans un anneau factoriel). Si l'on prend par exemple $\mathscr{A} = \mathbb{Z}[q]$ et $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$ la suite de $\mathbb{Z}[q]$ définie par $a_n = [n]_q := \frac{q^n - 1}{q-1}$, on obtient l'identité de Guo [5] selon laquelle on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\mathrm{ppcm}\left\{\binom{n}{0}_q, \binom{n}{1}_q, \ldots, \binom{n}{n}_q\right\} = \frac{\mathrm{ppcm}([1]_q, [2]_q, \ldots, [n]_q, [n+1]_q)}{[n+1]_q}$, où $[k]_q$ et $\binom{n}{k}_q$ ($0 \leq k \leq n$) sont les notations standards du q-calcul; c'est-à-dire $[k]_q := \frac{q^k - 1}{q-1}$ et $\binom{n}{k}_q := \frac{[n]_q[n-1]_q\cdots[n-k+1]_q}{[1]_q[2]_q\cdots[k]_q}$.

Théorème 4. *Soient P et Q deux entiers non nuls et premiers entre eux, tels que $P^2 - 4Q > 0$, et soit $U(P,Q)$ la suite de Lucas qui leur est associée (voir §1). Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :*

$$|\alpha|^{\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2} - 1} \leq \mathrm{ppcm}\,(U_1, U_2, \ldots, U_n) \leq |\alpha|^{\frac{n^2}{3} + \frac{7n}{3} - \frac{8}{3}}, \tag{4}$$

où α est la racine la plus grande en valeur absolue de l'équation quadratique $X^2 - PX + Q = 0$.

Remarque 5. Dans le contexte du théorème 4, si P et Q sont de signes particuliers (par exemple $P > 0$, $Q < 0$) alors l'estimation (4) peut être légèrement améliorée. Par exemple, pour le cas de la suite de Fibonacci usuelle $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (définie récursivement par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$), on montre que l'on a pour tout entier $n \geq 1$:

$$\Phi^{\frac{n^2}{4} - \frac{9}{4}} \leq \mathrm{ppcm}\,(F_1, F_2, \ldots, F_n) \leq \Phi^{\frac{n^2}{3} + \frac{4n}{3}}, \tag{5}$$

où Φ désigne le nombre d'or ($\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$). La qualité de l'estimation (5) peut être appréciée à partir du célèbre résultat de Matiyasevich et Guy [10] qui énonce que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{\log \mathrm{ppcm}\,(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{n^2 \log \Phi} = \frac{3}{\pi^2}.$$

En effet, ce résultat implique que si $\lambda_1, \mu_1, \eta_1, \lambda_2, \mu_2, \eta_2 \in \mathbb{R}$ vérifient :

$$\Phi^{\lambda_1 n^2 + \mu_1 n + \eta_1} \leq \mathrm{ppcm}\,(F_1, F_2, \ldots, F_n) \leq \Phi^{\lambda_2 n^2 + \mu_2 n + \eta_2} \quad (\forall\ n \geq 1),$$

alors, on a nécessairement $\lambda_1 \leq \frac{3}{\pi^2}$ et $\lambda_2 \geq \frac{3}{\pi^2}$. Puisque (5) correspond à $\lambda_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25$ et $\lambda_2 = \frac{1}{3} = 0{,}33\ldots$ et que $\frac{3}{\pi^2} = 0{,}303\ldots$, nous voyons bien que notre estimation (5) est assez précise. Plus généralement, l'estimation du théorème 4 peut être appréciée à partir du résultat de Kiss et Matyas [8], généralisant celui de Matiyasevich et Guy [10].

3. Préparation

Les preuves de nos résultats nécessitent les résultats intermédiaires suivants :

3.1. *Identités facilement vérifiables*

Pour toute suite à forte divisibilité $\boldsymbol{a} = (a_n)_{n\geq 1}$, on a :

$$a_k \binom{n+1}{k}_{\boldsymbol{a}} = a_{n+1} \binom{n}{k-1}_{\boldsymbol{a}} \quad (\forall\, n, k \in \mathbb{N},\ 1 \leq k \leq n+1), \tag{6}$$

$$\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}} \binom{k}{\ell}_{\boldsymbol{a}} = \binom{n}{\ell}_{\boldsymbol{a}} \binom{n-\ell}{k-\ell}_{\boldsymbol{a}} \quad (\forall\, n, k, \ell \in \mathbb{N},\ \ell \leq k \leq n). \tag{7}$$

3.2. *Résultats connus antérieurement*

La proposition suivante n'est pas connue en tant que telle, mais s'obtient sans peine à partir de son cas particulier relatif aux coefficients binomiaux de Gauss que l'on trouve dans [9, Equation (10)]. Sa démonstration (dans son cas général) est toutefois donnée par les auteurs dans [3].

Proposition 6. *Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs et $(a_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $a_n := \prod_{d \mid n} u_d$ ($\forall\ n \geq 1$). Alors, pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, avec $n \geq k$, on a : $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}} = \prod_d u_d$, où le produit $\prod_d$ porte sur tous les entiers strictement positifs $d \leq n$, tels que : $\left\lfloor \frac{k}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{d} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$.*

Théorème 7 (Nowicki [11]). *Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers strictement positifs et $(c_n)_{n\geq 1}$ la suite d'entiers strictement positifs définie par : $c_1 := a_1$ et $c_n := \frac{\mathrm{ppcm}(a_1,\dots,a_n)}{\mathrm{ppcm}(a_1,\dots,a_{n-1})}$ ($\forall\ n \geq 2$). Alors $(a_n)_n$ est à forte divisibilité si et seulement si l'on a pour tout $n \geq 1$: $a_n = \prod_{d \mid n} c_d$.*

Lemme 8 (Guo [5]). *Soient n et d deux entiers strictement positifs tels que $n \geq d$. Alors, l'existence de $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ tel que $\left\lfloor \frac{k}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-k}{d} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ équivaut au fait que d ne divise pas $(n+1)$.*

3.3. *Lemmes élémentaires*

Lemme 9. *Soient $n, m, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ des entiers strictement positifs. Alors, la propriété affirmant que : a_i divise b_j pour tous i, j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$ est équivalente à la propriété affirmant que* $\mathrm{ppcm}(a_1, \dots, a_n)$ *divise* $\mathrm{pgcd}(b_1, \dots, b_m)$.

Lemme 10. *Dans la situation du théorème 4, on a pour tout entier strictement positif n :*

$$|\alpha|^{n-2} \leq |U_n| \leq |\alpha|^n.$$

4. Preuves abrégées de nos résultats

Preuve du théorème 1. L'identité (1) du théorème 1 est triviale pour $n = 0$. Supposons pour la suite que $n \geq 1$ et désignons respectivement par A_n et B_n les membres de gauche et de droite de (1). Nous allons montrer que A_n divise B_n puis que B_n divise A_n, ce qui conclura que $A_n = B_n$. En vertu du théorème 7, on a pour tout entier $m \geq 1$: $a_m = \prod_{d \mid m} u_d$, avec $u_1 := a_1$ et $u_d := \frac{\mathrm{ppcm}(a_1,\dots,a_d)}{\mathrm{ppcm}(a_1,\dots,a_{d-1})}$ ($\forall\ d \geq 2$). D'autre part, de la définition de $(u_d)_d$ découle immédiatement que $\mathrm{ppcm}(a_1, \dots, a_m) = \prod_{d=1}^{m} u_d$ ($\forall\ m \geq 1$). Maintenant, pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, le produit

$\prod_d u_d = \binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}$ fourni par la proposition 6 porte sur des entiers d qui vérifient tous (d'après le lemme 8) : $1 \le d \le n$ et $d \nmid (n+1)$. Cela implique que le produit :

$$\prod_{\substack{1\le d\le n \\ d\nmid(n+1)}} u_d = \frac{\prod_{1\le d\le n+1} u_d}{\prod_{d\mid(n+1)} u_d} = \frac{\operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})}{a_{n+1}} = B_n$$

est un multiple de chacun des nombres $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}$ $(0 \le k \le n)$. D'où B_n est un multiple de A_n. Inversement, il est immédiat que $\operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})$ divise $\operatorname{ppcm}\left\{a_1\binom{n+1}{1}_{\boldsymbol{a}},\dots,a_{n+1}\binom{n+1}{n+1}_{\boldsymbol{a}}\right\}$, qui est (en vertu de (6)) égale à $a_{n+1}A_n$. D'où $\frac{\operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})}{a_{n+1}} = B_n$ divise A_n. Ce qui complète cette démonstration. □

Preuve du corollaire 2. L'identité (2) est une conséquence immédiate du théorème 1 et de l'identité (6). Montrons l'identité (3). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $k,\ell \in \mathbb{N}$ tels que $n/2 \le k \le n$ et $1 \le \ell \le k$, on a visiblement $a_\ell\binom{n}{\ell}_{\boldsymbol{a}}$ divise $a_\ell\binom{n}{\ell}_{\boldsymbol{a}}\binom{n-\ell}{k-\ell}_{\boldsymbol{a}}$, qui est égale (en vertu de (7)) à $a_\ell\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}\binom{k}{\ell}_{\boldsymbol{a}}$. Mais ce dernier nombre divise clairement le nombre $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}\operatorname{ppcm}\left\{a_i\binom{k}{i}_{\boldsymbol{a}};\ i=1,\dots,k\right\}$, qui est égal (en vertu de (2)) à $\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}\operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_k)$. Par conséquent, pour tous $k,\ell \in \mathbb{N}$, tels que $n/2 \le k \le n$ et $1 \le \ell \le k$, on a :

$$a_\ell\binom{n}{\ell}_{\boldsymbol{a}} \text{ divise } \binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}\operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_k). \tag{8}$$

Nous affirmons que (8) reste vraie pour $n/2 \le k \le n$ et $k < \ell \le n$. En effet, si k et ℓ sont des entiers tels que $n/2 \le k \le n$ et $k < \ell \le n$, alors on a $1 \le n-\ell+1 \le n-k \le k$ et $a_{n-\ell+1}\binom{n}{n-\ell+1}_{\boldsymbol{a}} = a_\ell\binom{n}{\ell}_{\boldsymbol{a}}$. L'application de (8) pour $\ell' = n-\ell+1$, au lieu de ℓ, confirme donc notre affirmation. Ainsi, (8) est vraie pour tous $k,\ell \in \mathbb{N}$ tels que $n/2 \le k \le n$ et $1 \le \ell \le n$. Par suite, en appliquant le lemme 9 pour toutes les relations de divisibilité (8), où $1 \le \ell \le n$ et $n/2 \le k \le n$ et en se servant de l'identité (2) (déjà démontrée), on en déduit que le nombre $\operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_n)$ divise le nombre $\operatorname{pgcd}\left\{\binom{n}{k}_{\boldsymbol{a}}\operatorname{ppcm}(a_1,\dots,a_k);\ n/2 \le k \le n\right\}$. Comme la divisibilité dans l'autre sens entre ces deux derniers nombres est immédiate, l'identité (3) en découle. Ce qui complète la preuve du corollaire 2. □

Preuve du théorème 4. En utilisant le lemme 10, on montre aisément que pour tous $n,k \in \mathbb{N}^*$, avec $n \ge k$, on a :

$$|\alpha|^{k(n-k-2)+1} \le \left|\binom{n}{k}_{\boldsymbol{U}}\right| \le |\alpha|^{k(n-k+2)-1}. \tag{9}$$

Par suite, pour montrer l'inégalité de gauche de (4) pour un entier $n \ge 2$ donné, on utilise successivement (2), le lemme 10 et (9). On obtient que :

$$\operatorname{ppcm}(U_1,U_2,\dots,U_n) = \operatorname{ppcm}\left\{U_1\binom{n}{1}_{\boldsymbol{U}},\dots,U_n\binom{n}{n}_{\boldsymbol{U}}\right\} \ge \max_{1\le k\le n}\left\{|U_k|\binom{n}{k}_{\boldsymbol{U}}\right\} \ge |\alpha|^{\frac{n^2}{4}-\frac{n}{2}},$$

comme il fallait le prouver. Pour $n = 1$, l'inégalité de gauche de (4) est triviale (puisque $|\alpha| > 1$). Pour montrer l'inégalité de droite de (4), on utilise une récurrence appropriée sur n. Pour $n = 1$, l'inégalité en question est triviale. Soit m un entier strictement positif. Supposons que ladite inégalité est satisfaite pour tout entier strictement positif $n < 2m$ et montrons qu'elle reste satisfaite pour $n = 2m$ et pour $n = 2m+1$. En utilisant successivement (3), l'hypothèse de récurrence et (9), on a :

$$\operatorname{ppcm}(U_1,U_2,\dots,U_{2m}) \le \operatorname{ppcm}(U_1,U_2,\dots,U_m)\cdot\left|\binom{2m}{m}_{\boldsymbol{U}}\right| \le |\alpha|^{\frac{(2m)^2}{3}+\frac{7(2m)}{3}-\frac{8}{3}},$$

$$\operatorname{ppcm}(U_1,U_2,\dots,U_{2m+1}) \le \operatorname{ppcm}(U_1,U_2,\dots,U_{m+1})\cdot\left|\binom{2m+1}{m+1}_{\boldsymbol{U}}\right| \le |\alpha|^{\frac{(2m+1)^2}{3}+\frac{7(2m+1)}{3}-\frac{8}{3}},$$

comme il fallait le prouver. Ce qui achève cette récurrence et complète cette démonstration. □

Remarque 11. L'estimation (5), relative à la suite de Fibonacci usuelle, s'obtient en reprenant la même preuve du théorème 4 et en utilisant aux endroits appropriés l'estimation raffinée $\Phi^{n-2} \leq F_n \leq \Phi^{n-1}$ ($\forall\, n \geq 1$), à la place du lemme 10.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier le référé anonyme pour ses remarques et suggestions fructueuses qui ont permis d'améliorer la première version de cette note et de mieux la situer par rapport aux travaux antérieurs.

Références

[1] J.-P. Bézivin, A. Pethö, A. J. van der Poorten, « A full characterisation of divisibility sequences », *Am. J. Math.* **112** (1990), nº 6, p. 985-1001.
[2] N. Bliss, B. Fulan, S. Lovett, J. Sommars, « Strong divisibility, cyclotomic polynomials, and iterated polynomials », *Am. Math. Mon.* **120** (2013), nº 6, p. 519-536.
[3] S. A. Bousla, B. Farhi, « Identities and estimations involving the least common multiple of strong divisibility sequences », https://arxiv.org/abs/1907.06700v2, 2020.
[4] B. Farhi, « An identity involving the least common multiple of binomial coefficients and its application », *Am. Math. Mon.* **116** (2009), nº 9, p. 836-839.
[5] V. J. W. Guo, « On the least common multiple of q-binomial coefficients », *Integers* **10** (2010), nº 3, p. 351-356.
[6] R. Honsberger, *Mathematical gems III.*, The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 9, The Mathematical Association of America, 1985.
[7] C. Kimberling, « Strong divisibility sequences and some conjectures », *Fibonacci Q.* (1979), p. 13-17.
[8] P. Kiss, F. Mátyás, « An asymptotic formula for π », *J. Number Theory* **31** (1989), nº 3, p. 255-259.
[9] D. E. Knuth, H. S. Wilf, « The power of a prime that divides a generalized binomial coefficient », *J. Reine Angew. Math.* **396** (1989), p. 212-219.
[10] Y. V. Matiyasevich, R. K. Guy, « A New Formula for π », *Am. Math. Mon.* **93** (1986), p. 631-635.
[11] A. Nowicki, « Strong divisibility and lcm-sequences », *Am. Math. Mon.* **122** (2015), nº 10, p. 958-966.
[12] P. Ribenboim, *My numbers, my friends : Popular lectures on number theory*, Springer, 2000.
[13] J. J. Sylvester, « On arithmetical series », *Messenger Math.* **21** (1892), p. 1-19 ; 87-120.
[14] M. Ward, « Note on divisibility sequences », *Bull. Am. Math. Soc.* (1936), p. 843-845.