Variation de l'ordre d'une base additive sous certains types de modifications légères sur ses éléments

Bakir FARHI

Université A. Mira de Béjaia

11 avril 2016

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Plan

1. Introduction
2. Partie 1 (majoration de l'ordre d'une base additive, obtenue par élimination d'une partie finie d'une base donnée)
3. Partie 2 (Représentation comme somme de 3 termes de la suite $\lfloor \frac{n^2}{a} \rfloor$)

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Notations

- *Pour* $A_1, \dots, A_h \subset \mathbb{N}$ *(avec* $h \in \mathbb{N}^*$*), on définit :*

$$A_1 + \cdots + A_h := \{x_1 + \cdots + x_h, \ \text{avec } x_1 \in A_1, \dots, x_h \in A_h\}.$$

- *Pour* $A \subset \mathbb{N}$ *et* $h \in \mathbb{N}^*$*, on définit :*

$$hA := \underbrace{A + \cdots + A}_{h \text{ fois}}.$$

- *Pour* $A, B \subset \mathbb{N}$*, on écrit* $A \sim B$ *lorsque* $A \Delta B$ *est fini.*

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Introduction

Définition

Une base additive est un ensemble A d'entiers naturels pour lequel il existe $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $hA \sim \mathbb{N}$.

Autrement dit, $A \subset \mathbb{N}$ est une base additive s'il existe $h \in \mathbb{N}^*$ tel que tout entier naturel assez grand s'écrit comme une somme de h éléments de A.

Le plus petit $h \in \mathbb{N}^*$ vérifiant cette propriété s'appelle l'ordre de A et se note $G(A)$.

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Quelques résultats classiques

- **Le théorème de Lagrange :** *Tout entier naturel peut s'écrire comme une somme de 4 carrés.*
  Conséquence : *L'ensemble des carrés parfaits (i.e., $\{n^2, \quad n \in \mathbb{N}\}$) est une base additive d'ordre* 4.

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Quelques résultats classiques

- **Le théorème de Lagrange :** *Tout entier naturel peut s'écrire comme une somme de 4 carrés.*
  Conséquence : *L'ensemble des carrés parfaits (i.e., $\{n^2, \quad n \in \mathbb{N}\}$) est une base additive d'ordre* 4.
- **Le théorème de Gauss-Legendre :** *Un entier naturel est une somme de 3 carrés si et seulement s'il n'est pas de la forme $4^h(8k+7)$, avec $h, k \in \mathbb{N}$.*
  Conséquence : *L'ensemble des nombres triangulaires (i.e., $\{\frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}\}$) est une base additive d'ordre* 3.

Le théorème de Hilbert-Waring

Théorème (Hilbert - 1909)

Pour tout entier $k \geq 2$, il existe $g(k) \in \mathbb{N}^*$ tel que tout entier naturel s'écrit comme une somme de $g(k)$ puissances $k^{\text{ème}}$. Autrement dit, l'ensemble :

$$\{n^k, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est une base additive.

Les nombres $G(k)$ (Hardy - Littlewood) : Pour tout entier $k \geq 2$, On définit :

$$G(k) := G\left(\{n^k, \quad n \in \mathbb{N}\}\right).$$

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Quelques résultats et conjectures

- Un simple argument combinatoire montre qu'on a : $G(k) \geq k+1$ $(\forall k \geq 2)$.

Quelques résultats et conjectures

- Un simple argument combinatoire montre qu'on a : $G(k) \geq k + 1$ ($\forall k \geq 2$).
- $G(2) = 4$ (Lagrange - 1770).

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Quelques résultats et conjectures

- Un simple argument combinatoire montre qu'on a : $G(k) \geq k+1$ $(\forall k \geq 2)$.
- $G(2) = 4$ (Lagrange - 1770).
- $G(4) = 16$ (Davenport - 1939).

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Quelques résultats et conjectures

- Un simple argument combinatoire montre qu'on a : $G(k) \geq k+1$ $(\forall k \geq 2)$.
- $G(2) = 4$ (Lagrange - 1770).
- $G(4) = 16$ (Davenport - 1939).
- $G(3) \leq 7$ (Linnik - 1943). On conjecture que $G(3) = 4$.

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Quelques résultats et conjectures

- Un simple argument combinatoire montre qu'on a : $G(k) \geq k+1$ $(\forall k \geq 2)$.
- $G(2) = 4$ (Lagrange - 1770).
- $G(4) = 16$ (Davenport - 1939).
- $G(3) \leq 7$ (Linnik - 1943). On conjecture que $G(3) = 4$.
- $G(5) \leq 17$, $G(6) \leq 24$, $G(7) \leq 33$, etc.

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Quelques résultats et conjectures

- Un simple argument combinatoire montre qu'on a : $G(k) \geq k+1$ ($\forall k \geq 2$).
- $G(2) = 4$ (Lagrange - 1770).
- $G(4) = 16$ (Davenport - 1939).
- $G(3) \leq 7$ (Linnik - 1943). On conjecture que $G(3) = 4$.
- $G(5) \leq 17$, $G(6) \leq 24$, $G(7) \leq 33$, etc.
- $G(k) \leq k(\log k + \log\log k + C)$, où C est une constante (Wooley).

Majoration de l'ordre d'une base additive, obtenue par élimination d'une partie finie d'une base donnée

(B. Farhi. Upper bounds for the order of an additive basis obtained by removing a finite subset of a given basis, *J. Number Theory*, **128** (2008), p. 2214-2230.)

Elements et parties essentielles d'une base additive :

Définition

Soit A une base additive et soit $x \in A$. On dit que x est un élément essentiel de A si $A \setminus \{x\}$ n'est pas une base additive.

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Définition (Généralisation)

Soit A une base additive et soit X une partie de A. On dit que X est une partie essentielle de A si :

1. *X est finie.*

Notations

Pour toute partie P de $\mathbb{N}$, on note :

$$\begin{aligned} \delta(P) &:= \operatorname{pgcd}\{x-y \mid x,y \in P, x>y\} \\ \Delta(P) &:= \lim_{n\to+\infty} \operatorname{pgcd}\{x-y \mid x,y \in P, x>y \geq n\}. \end{aligned}$$

ayet
éjaïa

Définition (Généralisation)

Soit A une base additive et soit X une partie de A. On dit que X est une partie essentielle de A si :

1. *X est finie.*
2. *$A \setminus X$ n'est pas une base.*

Notations

Pour toute partie P de $\mathbb{N}$, on note :

$$\begin{aligned} \delta(P) &:= \operatorname{pgcd}\{x - y | x, y \in P, x > y\} \\ \Delta(P) &:= \lim_{n \to +\infty} \operatorname{pgcd}\{x - y | x, y \in P, x > y \geq n\}. \end{aligned}$$

Définition (Généralisation)

Soit A une base additive et soit X une partie de A. On dit que X est une partie essentielle de A si :

1. *X est finie.*
2. *$A \setminus X$ n'est pas une base.*
3. *X est minimale (au sens de l'inclusion) pour la deuxième propriété.*

Notations

Pour toute partie P de $\mathbb{N}$, on note :

$$\begin{aligned} \delta(P) &:= \operatorname{pgcd}\{x - y | x, y \in P, x > y\} \\ \Delta(P) &:= \lim_{n \to +\infty} \operatorname{pgcd}\{x - y | x, y \in P, x > y \geq n\}. \end{aligned}$$

Remarque

Pour $P \subset \mathbb{N}$, on a $\delta(P) \in \mathbb{N}^*$ mais $\Delta(P) \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Théorème (Deschamps - Farhi)

Si A est une base additive, on a $\Delta(A) < +\infty$ (i.e., $\Delta(A) \in \mathbb{N}^*$).

Définition

Soit A une base additive. On appelle "la raison de A" l'entier strictement positif $\Delta(A)$.

Quelques résultats :

Théorème (Grekos)

Si A est une base additive d'ordre h alors A possède au maximum $(h-1)$ éléments essentiels.

Théorème (Deschamps - Grekos)

Si A est une base additive d'ordre h alors A possède au maximum $c_1 \sqrt{\frac{h}{\log h}}$ éléments essentiels, avec $c_1 \simeq 5,7$.

Théorème (Deschamps - Farhi (optimal))

Si A est une base additive d'ordre h alors A possède au maximum $c_2 \sqrt{\frac{h}{\log h}}$ éléments essentiels, avec $c_2 \simeq 2,05$.

Théorème (Deschamps - Farhi)

Si A est une base additive de raison r alors A possède au maximum $\omega(r)$ parties essentielles.

Comment reconnaitre une partie essentielle

Théorème (Erdős - Graham)

Soit A une base additive et soit $x \in A$. Alors $A \setminus \{x\}$ reste une base si et seulement si $\delta(A \setminus \{x\}) = 1$.

Théorème (généralisation)

Soit A une base additive et X une partie finie de A. Alors $A \setminus X$ reste une base si et seulement si $\delta(A \setminus X) = 1$.

Corollaire

Une base additive A possède des parties essentielles si et seulement si $\Delta(A) > 1$ (càd ssi A est incluse, à partir d'un certain rang, dans une progression arithmétique non triviale).

Un exemple important

Prenons :

$$A := \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad x = 0 \in A.$$

On sait que A est une base additive d'ordre 4 (Lagrange). Le théorème d'Erdős-Graham montre que $A \setminus \{0\} = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est aussi une base additive. Mais que vaut $G(A \setminus \{0\})$?

Réponse : $G(A \setminus \{0\}) = 5$.

Indication :

$$\begin{aligned} 169 = 13^2 = 5^2 + 12^2 &= 3^2 + 4^2 + 12^2 \\ &= 4^2 + 6^2 + 6^2 + 9^2. \end{aligned}$$

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Problème général

Soient A une base additive (d'ordre noté h) et X une partie finie de A tel que $\delta(A \setminus X) = 1$. Estimer $G(A \setminus X)$ en fonction de h et de paramètres liés à X (cardinal, diamètre, etc). On s'intéresse plus particulièrement aux majorations.

Théorème (Erdős - Graham)

Si $\mathrm{Card}\, X = 1$, *on a :* $G(A \setminus X) \leq \frac{5}{4}h^2 + \frac{1}{2}h \log h + 2h.$

Théorème (Grekos)

Si $\mathrm{Card}\, X = 1$, *on a :* $G(A \setminus X) \leq h^2 + h.$

Théorème (Nash)

Si $\mathrm{Card}\, X = 1$, *on a :* $G(A \setminus X) \leq \frac{1}{2}(h^2 + 3h).$

Théorème (Plagne)

Si $\mathrm{Card}\, X = 1$, *on a* : $G(A \setminus X) \leq \frac{h(h+1)}{2} + \lceil \frac{h-1}{3} \rceil$.

Conjecture (Plagne)

Si $\mathrm{Card}\, X = 1$, *on a* : $G(A \setminus X) \leq \frac{h(h+1)}{2} + 1$.

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Le résultat de Nash & Nathanson

Théorème (Nash-Nathanson)

Soient A une base additive d'ordre h et X une partie finie de A de cardinal k. Alors, si $A \setminus X$ est une base, on a :

$$G(A \setminus X) \leq (h+1)\binom{h+k-1}{k} - k\binom{h+k-1}{k+1}$$

Amélioration la dépendance en h dans la majoration de Nash-Nathanson :

Soit A une base additive d'ordre h et X une partie finie de A tel que $A \setminus X$ reste une base. On définit :

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Nouveaux paramètres

$$d := \frac{\mathrm{diam}(X)}{\delta(X)}$$

$$\eta := \min_{\substack{a,b \in A \setminus X, a \neq b \\ |a-b| \geq \mathrm{diam}(X)}} |a-b|$$

$$\mu := \min_{y \in A \setminus X} \mathrm{diam}\left(X \cup \{y\}\right).$$

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Amélioration de la dépendance en h

Théorème (Farhi)

On a :

$$G(A \setminus X) \leq \frac{h(h+3)}{2} + d\frac{h(h-1)(h+4)}{6}$$

$$G(A \setminus X) \leq \eta(h^2-1) + h + 1$$

$$G(A \setminus X) \leq \frac{h\mu(h\mu+3)}{2}.$$

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Cas particulier (Lorsque X est une progression arithmétique) :

Dans ce cas, on a : $d = k - 1$ (avec $k = \mathrm{Card} X$) et la première majoration du théorème améliore clairement le résultat de Nash-Nathanson.

Comparaison de la dépendance en k :

Exemple

Prenons $A = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$. On a $G(A) = 4$ (d'après Lagrange). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $X_n = \{0^2, 1^2, \dots, n^2\}$. Comme $\Delta(A) = 1$ alors A n'a pas de partie essentielle ; d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $A \setminus X_n$ est une base additive. Intéressons nous à l'ordre de ses bases.

Le théorème de Nash-Nathanson donne :

$$G(A \setminus X_n) \leq \frac{n^3}{3} + O(n^2).$$

Notre théorème donne :

$$G(A \setminus X_n) \leq 15n^2 + 5.$$

Questions ouvertes :

1. Peut-on majorer $G(A \setminus X_n)$ par une fonction affine en n ?

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Le théorème de Nash-Nathanson donne :

$$G(A \setminus X_n) \leq \frac{n^3}{3} + O(n^2).$$

Notre théorème donne :

$$G(A \setminus X_n) \leq 15n^2 + 5.$$

Questions ouvertes :

1. Peut-on majorer $G(A \setminus X_n)$ par une fonction affine en n ?
2. Peut-on majorer $G(A \setminus X_n)$ par une constante ?

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Une esquisse de la preuve de notre théorème

Définitions et notations

1. *Soit* $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite croissante et non stationnaire d'entiers. On définit la densité asymptotique inférieure de* U*, que l'on note par* $\underline{\mathbf{d}}(U)$*, par :*

$$\underline{\mathbf{d}}(U) := \liminf_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{Card}\,\{n \in \mathbb{N} : u_n \leq N\}}{N} \in [0, +\infty].$$

— *Si* U *est strictement croissante, on a* $\underline{\mathbf{d}}(U) \leq 1$.

Une esquisse de la preuve de notre théorème

Définitions et notations

1. *Soit* $U = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite croissante et non stationnaire d'entiers. On définit la densité asymptotique inférieure de* U*, que l'on note par* $\underline{\mathbf{d}}(U)$*, par :*

$$\underline{\mathbf{d}}(U) := \liminf_{N \to +\infty} \frac{\mathrm{Card}\,\{n \in \mathbb{N} : u_n \leq N\}}{N} \in [0, +\infty].$$

— *Si* U *est strictement croissante, on a* $\underline{\mathbf{d}}(U) \leq 1$*.*

2. *Etant données* $U_1, \ldots, U_n$ $(n \geq 1)$ *des suites croissantes non stationnaires d'entiers, on note par* $U_1 \vee U_2 \cdots \vee U_n$ *(ou* $\vee_{i=1}^{n} U_i$*) la suite croissante et non stationnaire, obtenue par l'assemblage (l'agrégat) de tous les termes des suites* U_i*, chacun compté avec sa multiplicité.*

Quelques propriétés immédiates :

- Si $U_1, \dots, U_n$ $(n \geq 1)$ sont des suites croissantes et non stationnaires d'entiers, on a :

$$\underline{\mathbf{d}}\left(U_1 \vee U_2 \vee \cdots \vee U_n\right) \geq \underline{\mathbf{d}}(U_1) + \cdots + \underline{\mathbf{d}}(U_n).$$

Quelques propriétés immédiates :

- Si $U_1, \dots, U_n$ $(n \geq 1)$ sont des suites croissantes et non stationnaires d'entiers, on a :

$$\underline{\mathbf{d}}\left(U_1 \vee U_2 \vee \cdots \vee U_n\right) \geq \underline{\mathbf{d}}(U_1) + \cdots + \underline{\mathbf{d}}(U_n).$$

- Si $U_1, \dots, U_n$ $(n \geq 1)$ sont des suites strictement croissantes d'entiers (qu'on peut donc considérer comme des ensembles), on a :

$$\underline{\mathbf{d}}\left(U_1 \vee U_2 \vee \cdots \vee U_n\right) \geq \underline{\mathbf{d}}\left(U_1 \cup \cdots \cup U_n\right).$$

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Partie non dégénérée d'un groupe abélien

Définition

1. *Soient G un groupe abélien et B une partie finie de G. On dit que B est non dégénérée dans G si :*

$$\mathrm{Stab}_G(B) = \{0\}.$$

Partie non dégénérée d'un groupe abélien

Définition

1. *Soient G un groupe abélien et B une partie finie de G. On dit que B est non dégénérée dans G si :*

$$\mathrm{Stab}_G(B) = \{0\}.$$

2. *Soient $B \subset \mathbb{Z}$ et $g \in \mathbb{N}^*$. On dit que B est non dégénérée modulo g si $\frac{B}{g\mathbb{Z}}$ est non dégénéré dans $\frac{\mathbb{Z}}{g\mathbb{Z}}$.*

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Les théorèmes de Kneser

Théorème (Le premier théorème de Kneser)

Soient $A_1, \dots, A_n$ $(n \geq 1)$ des ensembles non vides d'entiers naturels. Alors, on a :

— *Ou bien :*

$$\underline{\mathbf{d}}\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) \geq \underline{\mathbf{d}}\left(\bigvee_{i=1}^{n} A_i\right),$$

— *Ou bien $\sum_{i=1}^{n} A_i$ est (à partir d'un certain rang) une réunion finie de progressions arithmétiques de même raison.*

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Théorème (Le second théorème de Kneser)

Soient G un groupe abélien fini et $B_1, \ldots, B_n$ $(n \geq 1)$ des parties non vides de G telles que $(B_1 + \cdots + B_n)$ soit non dégénérée dans G. Alors, on a :

$$|B_1 + \cdots + B_n| \geq |B_1| + \cdots + |B_n| - n + 1.$$

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Le schéma de preuve de nos résultats

Soient A une base additive d'ordre h ($h \in \mathbb{N}^*$) et X une partie finie de A telle que $A \setminus X$ reste une base.

- On détermine des entiers $n \in \mathbb{N}^*$, $h_i \in \mathbb{N}^*$ et $\tau_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 0, \dots, n$) tels qu'en posant $A_i := h_i(A \setminus X)$ (pour $i = 0, \dots, n$), on ait :

$$\underline{\mathbf{d}}(A_0) > 0 \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^{n} (A_i + \tau_i) \sim \mathbb{N} \tag{1}$$

Dans notre preuve, les h_i dépendent uniquement de h et $h_0 \leq n$.

- Les faits de (1) montrent qu'on a :

$$\underline{\mathbf{d}}\left(\bigvee_{i=0}^{n} A_i\right) > 1.$$

Ceci montre que la $1^{\text{ère}}$ alternative du premier théorème de Kneser ne peut avoir lieu. On est donc dans la 2^{nde} alternative du théorème de Kneser. C'est-à-dire que l'ensemble $\sum_{i=0}^{n} A_i$ est (à partir d'un certain rang) une réunion finie de progressions arithmétiques de même raison. Soit g la plus petite raison possible.

Ce choix de g entraîne que l'ensemble $\sum_{i=0}^{n} A_i$ est non dégénéré modulo g ; c'est-à-dire que $\sum_{i=0}^{n} \frac{A_i}{g\mathbb{Z}}$ est non dégénéré dans $\frac{\mathbb{Z}}{g\mathbb{Z}}$. Ceci entraîne, d'après le second théorème de Kneser, que :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{g\mathbb{Z}}\right| \geq \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{A_i}{g\mathbb{Z}}\right| - n + 1.$$

Mais puisque $\bigcup_{i=1}^{n} (A_i + \tau_i) \sim \mathbb{N}$, on a : $\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{A_i}{g\mathbb{Z}}\right| \geq g$.
D'où : $\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{g\mathbb{Z}}\right| \geq g - n + 1$. C'est-à-dire :

$$\left|\frac{(h_1 + \cdots + h_n)(A \setminus X)}{g\mathbb{Z}}\right| \geq g - n + 1 \qquad (2)$$

Lemme

La suite d'entiers naturels $\left(\left|\frac{r(A \setminus X)}{g\mathbb{Z}}\right|\right)_{r \in \mathbb{N}}$ *commence par croitre strictement puis se stationne.*

Ce lemme ajouté au fait que $(A \setminus X)$ est une base entraîne que la suite $\left(\left|\frac{r(A \setminus X)}{g\mathbb{Z}}\right|\right)_{r \in \mathbb{N}}$ commence par croitre puis se stationne en g. Ce qui entraîne (en vertu de (2)) que :

$$\left|\frac{(h_1 + \cdots + h_n + n)(A \setminus X)}{g\mathbb{Z}}\right| = g.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{(h_1 + \cdots + h_n + n)(A \setminus X)}{g\mathbb{Z}} = \frac{\mathbb{Z}}{g\mathbb{Z}} \tag{3}$$

Rappels : On a $h_0 \leq n$ et l'ensemble $(h_0 + \cdots + h_n)(A \setminus X)$ est (à partir d'un certain rang) une réunion finie de progressions arithmétiques de raison g. On a donc :

$$\begin{aligned}(h_1 + \cdots + h_n + n)\,(A \setminus X) &= (h_0 + \cdots + h_n)\,(A \setminus X) \\ &\qquad + (n - h_0)(A \setminus X) \\ &= F \cup \bigcup_{\text{finie}} (\text{prog. arith. de raison } g) \qquad (\text{avec } F \text{ fini}).\end{aligned}$$

Il en résulte (en vertu de (3)) que :

$$(h_1 + \cdots + h_n + n)\,(A \setminus X) \sim \mathbb{N}.$$

D'où :

$$\boxed{G(A \setminus X) \leq h_1 + \cdots + h_n + n}\,. \qquad \blacksquare$$

Représentation des entiers naturels comme somme de trois termes de la suite $\left\lfloor \frac{n^2}{a} \right\rfloor$

Théorème (Le point de départ)

Tout entier naturel peut s'écrire comme somme de 3 nombres de la forme $\left\lfloor \frac{n^2}{8} \right\rfloor$ $(n \in \mathbb{N})$.

Démonstration.

C'est une conséquence immédiate du théorème de Gauss sur les nombres triangulaires. Il suffit de constater que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{k^2 + k}{2} = \left\lfloor \frac{n^2}{8} \right\rfloor, \quad \text{avec} \quad n = (2k+1)^2. \qquad \blacksquare$$

Position du problème. Peut-on remplacer dans le théorème précédent le nombre 8 par un autre entier strictement positif $a < 8$?

Les premiers résultats (2013) :

Théorème

Tout entier naturel peut s'écrire comme une somme de 3 nombres de la forme $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ $(n \in \mathbb{N})$.

Démonstration :

Etant donné $N \in \mathbb{N}$, on utilise le théorème de Gauss-Legendre pour $(4N+1)$. On obtient qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$4N + 1 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Les résidus quadratiques modulo 4 permettent de conclure que :

$$N = \left\lfloor \frac{a^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c^2}{4} \right\rfloor . \qquad \blacksquare$$

Théorème

Tout entier naturel $N \not\equiv 2 \pmod{24}$ peut s'écrire comme une somme de 3 nombres de la forme $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ $(n \in \mathbb{N})$.

Démonstration.

Etant donné $N \in \mathbb{N}$, on détermine $r \in \{1, 2, 3\}$ tel que $3N + r \not\equiv 0, 4, 7 \pmod{8}$. Le théorème de Gauss-Legendre montre alors qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que :

$$3N + r = a^2 + b^2 + c^2.$$

Les résidus quadratiques modulo 3 permettent de conclure à :

$$N = \left\lfloor \frac{a^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c^2}{3} \right\rfloor. \qquad \blacksquare$$

Conjecture (résolue en 2014)

Tout entier naturel peut s'écrire comme une somme de 3 nombres de la forme $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ $(n \in \mathbb{N})$.

Qu'est ce qui bloque le cas $N \equiv 2 \pmod{24}$?

Dans la démonstration du théorème précédent, on a pris :

$$r = \begin{cases} 1 \text{ ou } 2 & \text{si } N \not\equiv 2 \pmod{8} \\ 3 & \text{si } N \equiv 2 \pmod{8} \end{cases}.$$

Lorsque $N \equiv 2 \pmod{24}$ (donc $N \equiv 2 \pmod{8}$), si l'on prend $r = 3$, on trouve :

$$3N + 3 = a^2 + b^2 + c^2.$$

On a donc :

• Ou bien $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod 3$. Ceci permet de conclure à :

$$N = \left\lfloor \frac{a^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c^2}{3} \right\rfloor .$$

• Ou bien $a \equiv b \equiv c \equiv 0 \pmod 3$. Ce qui donne :

$$N = \left\lfloor \frac{a^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c^2}{3} \right\rfloor - 1$$

et ça ne permet pas de conclure !

Le travail de S. Mezroui, A. Azizi & M. Ziane (2014)

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n \equiv 1 \pmod 8$ alors on a :

$$r_3(9n) > \frac{3}{2} r_3(n),$$

où $r_3(k)$ désigne le nombre de représentations de k comme somme de 3 carrés d'entiers.

Corollaire

Tout entier naturel peut s'écrire comme une somme de 3 nombres de la forme $\left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor$ $(n \in \mathbb{N})$.

ayet
éjaïa

Démonstration.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Le cas $N \not\equiv 2 \pmod{24}$ est déjà résolu. Supposons que $N \equiv 2 \pmod{24}$. Donc N s'écrit : $N = 24k + 2$ $(k \in \mathbb{N})$. D'où :

$$3N + 3 = 9(8k + 1).$$

Le théorème de Gauss-Legendre montre que chacun des deux entiers naturels $(8k + 1)$ et $9(8k + 1)$ est somme de 3 carrés. Mais puisque $r_3(9(8k + 1)) > r_n(8k + 1)$ (en vertu du théorème précédent), alors $9(8k + 1) = 3N + 3$ possède une représentation comme somme de 3 carrés qui ne provient pas trivialement d'une des représentations de $(8k + 1)$. C-à-d qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{N}$, qui ne sont pas tous des multiples de 3, tels que :

$$3N + 3 = a^2 + b^2 + c^2.$$

On a forcément $a \equiv b \equiv c \equiv 1 \pmod 3$. Ce qui conclut à :

$$N = \left\lfloor \frac{a^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b^2}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c^2}{3} \right\rfloor . \qquad \blacksquare$$

Remarque

Le point clef de la démonstration de la conjecture est l'inégalité :

$$r_3(9n) > r_3(n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}, n \equiv 1 \pmod 8).$$

Une preuve élémentaire de la conjecture (Farhi 2014)

On utilise l'identité :

$$9\left(x^2+y^2+z^2\right) = (2x+2y+z)^2 + (2x-y-2z)^2 + (x-2y+2z)^2$$

$(\forall x, y, z \in \mathbb{Z})$.

Cette identité montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \equiv 1 \pmod 8$, on a :

$$r_3(9n) > r_3(n).$$

Ce qui permet de conclure. ∎

Conjectures

Conjecture (Farhi - 2014)

Soit $a \geq 3$ un entier. Alors, tout entier naturel peut s'écrire comme une somme de 3 nombres de la formes $\left\lfloor \frac{n^2}{a} \right\rfloor$ $(n \in \mathbb{N})$.

On sait que cette conjecture est vraie pour $a \in \{3, 4, 8\}$.

Remarque

Si la conjecture précédente est vraie pour un certain $a \geq 3$ alors elle reste encore vraie pour tous les entiers de la forme ak^2 $(k \in \mathbb{N}^*)$. Il suffit donc de montrer la conjecture pour les entiers (≥ 5) ***sans facteurs carrés****.*

Théorème (S. T. Holdum - 2015)

La conjecture précédente est encore vraie pour :

$$a \in \{7, 9, 20, 24, 40, 104, 120, \dots\}.$$

Généralisation aux puissances $k^{\text{èmes}}$:

Conjecture (Farhi - 2013)

Soit $k \geq 2$ un entier. Alors, il existe un entier strictement positif $a(k)$ pour lequel la propriété suivante est vérifiée :

> *« Tout entier naturel peut s'écrire comme une somme de $(k+1)$ nombres de la forme $\left\lfloor \frac{n^k}{a(k)} \right\rfloor$ $(n \in \mathbb{N})$ ».*

Merci pour votre attention

جامعة بجاية
Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa