Sur la somme des valeurs d'un polynôme en des nombres naturels formant une progression arithmétique strictement décroissante

Bakir FARHI

Université A. Mira de Béjaia

15 mars 2022

Plan

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

IJPAM

Indian J Pure Appl Math
https://doi.org/10.1007/s13226-022-00225-w

ORIGINAL RESEARCH

On the sum of the values of a polynomial at natural numbers which form a decreasing arithmetic progression

Bakir Farhi

A tribute to Ibn al-Banna al-Marrakushi on the 700th *anniversary of his death*

Received: 12 November 2021 / Accepted: 20 January 2022

Notation

Pour tout ce qui suit, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, l'écriture :

$$P(n) + P(n-d) + P(n-2d) + \dots$$

sous-entend qu'on somme jusqu'à la valeur de P au dernier entier naturel de la progression arithmétique $(n - kd)_{k \in \mathbb{N}}$. Plus loin, on désignera une telle somme par $S_{P,d}(n)$.

Motivation : Une formule d'Ibn al-Banna

Ibn al-Banna al-Marrakushi (1256 - 1321)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\boxed{n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \cdots = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}},$$

où la somme de gauche s'arrête au carré du dernier nombre naturel rencontré.

Preuve naturelle (sous la vision d'aujourd'hui)

- Distinguer les cas « n pair » et « n impair » et raisonner par récurrence pour chacun des deux cas. Par hasard, les deux cas se recollent pour donner un même polynôme !
- Or, l'analogue en prenant n au lieu de n^2 est :

$$n + (n-2) + (n-4) + \cdots = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right),$$

qui n'est pas un polynôme (les deux cas ne se recollent pas). Comment expliquer ce phénomène ?

Preuve naturelle (sous la vision d'aujourd'hui)

- Distinguer les cas « n pair » et « n impair » et raisonner par récurrence pour chacun des deux cas. Par hasard, les deux cas se recollent pour donner un même polynôme !
- Or, l'analogue en prenant n au lieu de n^2 est :

$$n + (n-2) + (n-4) + \cdots = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \right),$$

qui n'est pas un polynôme (les deux cas ne se recollent pas). Comment expliquer ce phénomène ?

Une 1ère explication

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^2+(n-2)^2+(n-4)^2+\cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(n-2k)^2 = \text{polynôme}(n).$$

- Plus généralement, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^{2r}+(n-2)^{2r}+(n-4)^{2r}+\cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(n-2k)^{2r} = \text{polynôme}(n)$$

Une 1ère explication

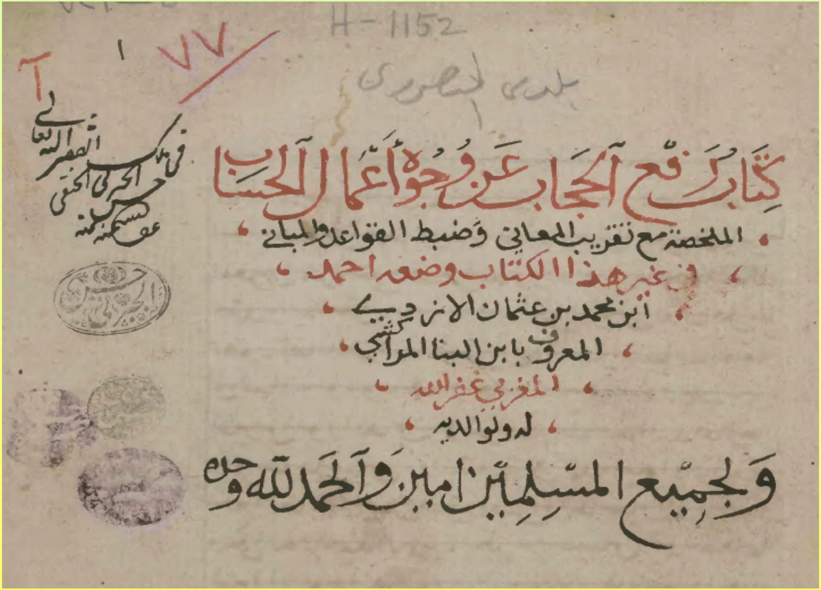
- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^2+(n-2)^2+(n-4)^2+\cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(n-2k)^2 = \text{polynôme}(n).$$

- Plus généralement, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^{2r}+(n-2)^{2r}+(n-4)^{2r}+\cdots = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(n-2k)^{2r} = \text{polynôme}(n)$$

La preuve d'Ibn al-Banna



La preuve d'Ibn al-Banna

العدد فانه اذا قسم مجموع المربعات المتوالية
على مجموع اضلاعها الذي هو مثلث منتهى الاضلاع
كانت الخارجات تتفاضل بثلثي واحد اولها واحد
كما نبينه بعد بحول الله تعالى فالخارجات عددها
مثل منتهى الاضلاع واولها الواحد وتتفاضل
بثلثين فيلزم من العمل في ذلك اذا استخرجت
الطرفان لا كبر ان يكون مثل ثلثي المنتهى اليه وثلث واحد
ابدا لانه مثل ثلثي العدد الذي يلي المنتهى اليه
قبله وواحد وهو ثلث مجموع المنتهى اليه قبله
وواحد وهو ثلث مجموع المنتهى اليه مع العدد الذي
يليه بعده وعدة الاعداد المتوالية من الواحد
مثل العدد المنتهى اليه ابدا وجمع الافراد هو ما ذكر
في الكتاب وعدة الاعداد فيه مثل نصف مجموع
الطرفين وهو نصف العدد الذي يلي المنتهى اليه
وجمع المربعات على تواليها الافراد وحدها والازواج
وحدها هو على ما ذكر في الكتاب وظاهر منه
ان المنتهى اليه والعدد الذي يليه انه بعده
هي ثلاثة اعداد يضرب بعضها في بعض ويؤخذ
سدس الخارج او يضرب سدس احدهما في مسطح
الباقيين ومسطحهما هو ضرب احدهما في الاخر او يضرب
نصف احدهما في ثلث الثاني في كامل الثالث كل ذلك
سوا لانه متى اجتمع في مسالة ضرب وقسمة فتقديم
القسمة على الضرب او الضرب على القسمة والقسمة
اما على جملة المقسوم عليه او على اجزائه التي تركب
منها او تقسيم احد المضروبين على بعض الاجزاء وتضرب

La preuve d'Ibn al-Banna

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = T_n + T_{n-1}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned} n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \dots &= (T_n + T_{n-1}) + (T_{n-2} + T_{n-3}) \\ &= T_n + T_{n-1} + T_{n-2} + \dots , \end{aligned}$$

où la dernière somme se termine ou bien par T_0 (si n est impair) ou bien par T_{-1} (si n est pair).
Comme $\boxed{T_{-1} = 0}$, on peut dire que la dernière somme se termine toujours par T_0.

La preuve d'Ibn al-Banna

- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = T_n + T_{n-1}.$$

- D'où :

$$\begin{aligned} n^2 + (n-2)^2 + (n-4)^2 + \dots &= (T_n + T_{n-1}) + (T_{n-2} + T_{n-3}) \\ &= T_n + T_{n-1} + T_{n-2} + \dots, \end{aligned}$$

où la dernière somme se termine ou bien par T_0 (si n est impair) ou bien par T_{-1} (si n est pair).
Comme $\boxed{T_{-1} = 0}$, on peut dire que la dernière somme se termine toujours par T_0.

La preuve d'Ibn al-Banna

- On a donc :

$$n^2+(n-2)^2+(n-4)^2+\cdots = T_0+T_1+\cdots+T_n = \text{polynôme}(n).$$

- Utilisons la même idée pour trouver d'autres formules semblables : prenons :

$$S_n := \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{et} \quad P(n) := S_n + S_{n-1} + S_{n-2}.$$

On a alors :

La preuve d'Ibn al-Banna

- On a donc :

$$n^2+(n-2)^2+(n-4)^2+\cdots = T_0+T_1+\cdots+T_n = \text{polynôme}(n).$$

- Utilisons la même idée pour trouver d'autres formules semblables : prenons :

$$S_n := \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{et} \quad P(n) := S_n + S_{n-1} + S_{n-2}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} P(n) + P(n-3) + P(n-6) + \dots & \\ &= (S_n + S_{n-1} + S_{n-2}) + (S_{n-3} + S_{n-4} + S_{n-5}) + \dots \\ &= S_n + S_{n-1} + S_{n-2} + S_{n-3} + \dots, \end{aligned}$$

où la dernière somme se termine par S_{-2} si $n \equiv 0[3]$, par S_{-1} si $n \equiv 1[3]$ et par S_0 si $n \equiv 2[3]$. Mais comme $\boxed{S_{-1} = S_{-2} = 0}$, on peut dire que la somme se termine toujours par S_0. D'où :

$$\begin{aligned} P(n) + P(n-3) + P(n-6) + \dots &= S_0 + S_1 + \dots + S_n \\ &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}; \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\begin{aligned} & n\left(n^2+1\right)+(n-3)\left((n-3)^2+1\right)+(n-6)\left((n-6)^2+1\right)+\dots \\ & \qquad = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}. \end{aligned}}$$

Position du problème

- Pour $d \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathscr{E}_d$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ pour lesquels la somme

$$S_{P,d}(n) := P(n)+P(n-d)+P(n-2d)+\dots \qquad (n \in \mathbb{N})$$

est polynomiale en n.

- Il est claire que $\mathscr{E}_d$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, $\mathscr{E}_1 = \mathbb{R}[X]$.
- **Problème :** Caractériser $\mathscr{E}_d$ (en lui déterminant une base par exemple).

Position du problème

- Pour $d \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathscr{E}_d$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ pour lesquels la somme

$$S_{P,d}(n) := P(n)+P(n-d)+P(n-2d)+\dots \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  est polynomiale en n.
- Il est claire que $\mathscr{E}_d$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, $\mathscr{E}_1 = \mathbb{R}[X]$.
- **Problème :** Caractériser $\mathscr{E}_d$ (en lui déterminant une base par exemple).

Position du problème

- Pour $d \in \mathbb{N}^*$, désignons par $\mathscr{E}_d$ l'ensemble des polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ pour lesquels la somme

$$S_{P,d}(n) := P(n) + P(n-d) + P(n-2d) + \dots \qquad (n \in \mathbb{N})$$

  est polynomiale en n.
- Il est claire que $\mathscr{E}_d$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. De plus, $\mathscr{E}_1 = \mathbb{R}[X]$.
- **Problème :** Caractériser $\mathscr{E}_d$ (en lui déterminant une base par exemple).

Les résultats

Théorème 1

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Alors un polynôme réel P appartient à $\mathscr{E}_d$ si et seulement s'il est de la forme :

$$P(X) = \binom{X+d}{d} f(X+d) - \binom{X}{d} f(X), \qquad (1)$$

où $f \in \mathbb{R}[X]$. De plus, si (1) a lieu alors on a :

$$P(n-d)+P(n-2d)+P(n-3d)+\cdots = \binom{n}{d} f(n) \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Les résultats

Corollaire 2

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Alors la famille de polynômes :

$$\mathscr{B} = \left(\binom{X+d}{d}(X+d)^k - \binom{X}{d}X^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$$

constitue une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathscr{E}_d$.

Les résultats

Corollaire 3

Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Alors on a :

$$\mathscr{E}_d \oplus \mathbb{R}_{d-2}[X] = \mathbb{R}[X],$$

où $\mathbb{R}_{d-2}[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$, constitué des polynômes réels de degrés $\leq d-2$. En particulier :

$$\mathrm{Codim}_{\mathbb{R}[X]}\mathscr{E}_d = d - 1.$$

Le cas particulier $d = 2$

D'après le corollaire 3, on a :

$$\mathscr{E}_2 \oplus \mathbb{R}_0[X] = \mathbb{R}[X].$$

Donc $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\exists!\, c_P \in \mathbb{R}$ tel que : $P(X) - c_P \in \mathscr{E}_2$.

En particulier : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists!\, c_k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\left(X^k - c_k\right) \in \mathscr{E}_2.$$

Le cas particulier $d = 2$

Théorème 4

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$c_k = E_k(0) = \frac{G_{k+1}}{k+1},$$

où les E_k sont les polynômes d'Euler et les G_k sont les nombres de Genocchi.

Les premières valeurs des nombres c_k :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
c_n	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{31}{2}$	0	$\frac{691}{4}$	0	$-$

Les polynômes de Bernoulli et d'Euler et les nombres de Genocchi

Les polynômes de Bernoulli $B_n(X)$ ($n \in \mathbb{N}$), les polynômes d'Euler $E_n(X)$ ($n \in \mathbb{N}$) et les nombres de Genocchi G_n ($n \in \mathbb{N}$) sont définis par leurs séries génératrices exponentielles :

$$\frac{te^{Xt}}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n(X) \frac{t^n}{n!} \quad , \quad \frac{2e^{Xt}}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} E_n(X) \frac{t^n}{n!} \; ,$$

$$\frac{2t}{e^t + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} G_n \frac{t^n}{n!}.$$

Généralisabilité de la méthode d'Ibn al-Banna

Théorème 5

Soit $d \geq 2$ un entier. Si un polynôme réel P appartient à $\mathscr{E}_d$ alors il existe $T \in \mathbb{R}[X]$, satisfaisant $T(-1) = T(-2) = \cdots = T(-d+1) = 0$, tel que :

$$P(X) = T(X) + T(X-1) + \cdots + T(X-d+1).$$

Une seconde approche (via les séries génératrices ordinaires)

Définition

La série génératrice ordinaire d'une suite réelle $\mathbf{u} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la série formelle donnée par :

$$\sigma(\mathbf{u}) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n X^n.$$

Exemple 6

La série génératrice ordinaire de la suite de Fibonacci usuelle $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $(F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+2} = F_n + F_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N})$ est :

$$\sigma(F) = \frac{X}{1 - X - X^2}.$$

Deux théorèmes importants

Théorème 7 (Caractérisation des suites récurrentes linéaires à coefficients constants)

Une suite réelle est récurrente linéaire à coefficients constants ssi sa série génératrice ordinaire est **une fonction rationnelle de degré** < 0.

Théorème 8 (Caractérisation des suites polynomiales)

Une suite réelle est polynomiale ssi sa série génératrice ordinaire est de la forme $\frac{U(X)}{(1-X)^{\alpha}}$*, avec* $U \in \mathbb{R}[X]$*,* $\alpha \in \mathbb{N}$ *et* $\deg U < \alpha$.

Le produit de convolution ordinaire

Définition

Le produit de convolution ordinaire de deux suites réelles $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{b} = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite réelle $\mathbf{a} * \mathbf{b}$, définie par :

$$(\mathbf{a} * \mathbf{b})_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Proposition 9

Si $\mathbf{a}$ *et* $\mathbf{b}$ *sont deux suites réelles, on a :*

$$\sigma(\mathbf{a} * \mathbf{b}) = \sigma(\mathbf{a})\sigma(\mathbf{b}).$$

Reprenons le problème posé !

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{P,d}(n) := P(n)+P(n-d)+P(n-2d)+\cdots = \sum_{k=0}^{n} \delta(k)P(n-k),$$

avec

$$\delta(k) := \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 (\mathrm{mod}\ d) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc $S_{P,d} = \delta * P$.

Reprenons le problème posé !

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $d \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{P,d}(n) := P(n)+P(n-d)+P(n-2d)+\cdots = \sum_{k=0}^{n} \delta(k)P(n-k),$$

avec

$$\delta(k) := \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 (\bmod d) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Donc $S_{P,d} = \delta * P$.

Reprenons le problème posé !

D'où : $\sigma(S_{P,d}) = \sigma(\delta)\sigma(P)$. Mais

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{1 - X^d},$$

$$\sigma(P) = \frac{A_P(X)}{(1 - X)^{\deg P + 1}} \quad \text{(avec } A_p \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \deg A_p \leq \deg P\text{).}$$

D'où : $\sigma(S_{P,d}) = \dfrac{A_P(X)}{(1 + X + X^2 + \cdots + X^{d-1})(1 - X)^{\deg P + 2}}.$

Reprenons le problème posé !

D'où : $\sigma(S_{P,d}) = \sigma(\delta)\sigma(P)$. Mais

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{1 - X^d},$$

$$\sigma(P) = \frac{A_P(X)}{(1 - X)^{\deg P + 1}}$$ (avec $A_p \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg A_p \leq \deg P$).

D'où : $$\sigma(S_{P,d}) = \frac{A_P(X)}{(1 + X + X^2 + \cdots + X^{d-1})(1 - X)^{\deg P + 2}}.$$

Tasdawit n Bgayet
Université de Béjaïa

Reprenons le problème posé !

D'où : $\sigma(S_{P,d}) = \sigma(\delta)\sigma(P)$. Mais

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{1 - X^d},$$

$$\sigma(P) = \frac{A_P(X)}{(1 - X)^{\deg P+1}} \quad \text{(avec } A_p \in \mathbb{R}[X] \text{ et } \deg A_p \leq \deg P\text{).}$$

D'où : $\sigma(S_{P,d}) = \dfrac{A_P(X)}{(1 + X + X^2 + \cdots + X^{d-1})(1 - X)^{\deg P+2}}.$

Reprenons le problème posé !

Proposition 10

$P \in \mathscr{E}_d$ si et seulement si $A_P(X)$ est un multiple de $(1 + X + X^2 + \cdots + X^{d-1})$.

Espaces plus généraux : Pour $d \in \mathbb{N}^*$ et $D \in \mathbb{R}[X]$ de degré $(d-1)$, avec $D(1) \neq 0$, on définit $\mathscr{E}_D$ comme étant l'ensemble des polynômes réel P tels que $A_P(X)$ soit un multiple de $D(X)$. On a particulièrement :

$$\mathscr{E}_d = \mathscr{E}_{(1+X+X^2+\cdots+X^{d-1})}.$$

Le théorème général

Théorème 11

Si $\dfrac{D(X)}{(1-X)^d} = \sum_{n=0}^{+\infty} h(n) X^n$ *alors la famille de polynômes*

$$(h, h * 1, h * X, h * X^2, \dots)$$

constitue une base du $\mathbb{R}$*-espace vectoriel* $\mathscr{E}_D$.

Corollaire 12

Sous les mêmes hypothèses, on a : $\mathscr{E}_D \oplus \mathbb{R}_{d-2}[X] = \mathbb{R}[X]$.
D'où : $\mathrm{Codim}_{\mathbb{R}[X]} \mathscr{E}_D = d - 1$.

Merci de votre attention !